Capítulo 2

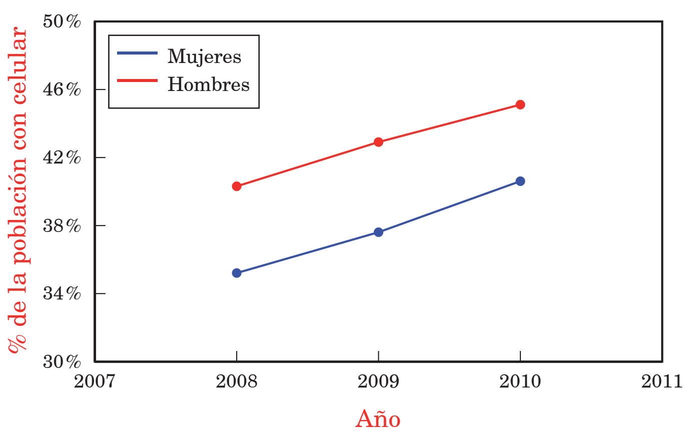
Funciones lineales

Todos los días leemos, en los medios de comunicación, información basada en datos recopilados de fuentes estadísticas. En el Ecuador, el organismo encargado de recopilar datos es el Instituto Ecuatoriano de Estadística y Censos, INEC. En el año 2011, el INEC publicó información sobre el uso de la tecnología para la comunicación (celulares, Internet, etcétera) por parte de los diversos sectores de la sociedad ecuatoriana.

En este informe, entre otros muchos datos, aparece el porcentaje (clasificado por sexo) de personas que han usado celular en Ecuador, durante los años 2008, 2009 y 2010. En el cuadro siguiente, se presentan las cifras para los tres años mencionados:

Año	Hombres	Mujeres
2008	40,3 %	35,2 %
2009	42,9 %	37,6 %
2010	45,1 %	40,6 %

Para informar al público sobre esta estadística, un periodista observa estos datos y titula a su artículo: “Más hombres que mujeres usan celular”. Otro periodista que analizó los datos de manera más detallada escribe el titular “En el 2010 las mujeres usaron el celular más veces que los hombres”. ¿Es el segundo titular correcto? Si tú fueras el director editorial del periódico, ¿cuál de estos dos titulares escogerías? ¿Por qué? En este capítulo aprenderemos la matemática necesaria para analizar datos que presentan una tendencia lineal como la que observas en la gráfica sobre el uso del celular en el Ecuador.



Preparación y repaso

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   (a) $2x-1=3$.
   (b) $3y+3=7y$.
   (c) $0=-\frac{1}{2}x+3$.
   (d) $0{,}25x+0{,}1=10$.
2. Evalúa la expresión $m=\dfrac{a+b}{c+d}$ para los valores dados a continuación:
   (a) $a=2$, $b=3$, $c=-1$ y $d=4$.
   (b) $a=-1$, $b=5$, $c=2$ y $d=0$.
   (c) $a=1/2$, $b=-1/3$, $c=4/3$ y $d=3/2$.
3. En cada ecuación:
   (a) $3x-2y=0$, determina y en términos de x.
   (b) $3r-2s=0$, determina s en términos de r.
   (c) $2x+y=2y$, determina x en términos de y.
   (d) $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{5}y=x$, determina y en términos de x.

La ecuación de una recta

En décimo año de EGB, aprendiste sobre rectas y su representación a través de ecuaciones. Recordemos, con el siguiente ejemplo, algunos de esos conceptos.

- Dos puntos determinan unívocamente una recta.
- Para trazar una recta, es suficiente conocer dos de sus puntos.

Ejemplo 1

La *ecuación*

$$y=3x-1$$

es una relación entre las cantidades o *variables* x e y que *representa algebraicamente* una *línea recta* (o *recta*, simplemente) en un plano de coordenadas cartesianas. Por esta razón, la ecuación lleva el nombre de *lineal*.

De manera más precisa, cada par ordenado (x,y) de números que satisfacen la ecuación $y=3x-1$ representa un punto de esta recta. Por ejemplo: el par ordenado $(2,5)$ representa un punto de la recta, pues los números 2 y 5 satisfacen la ecuación $y=3x-1$:

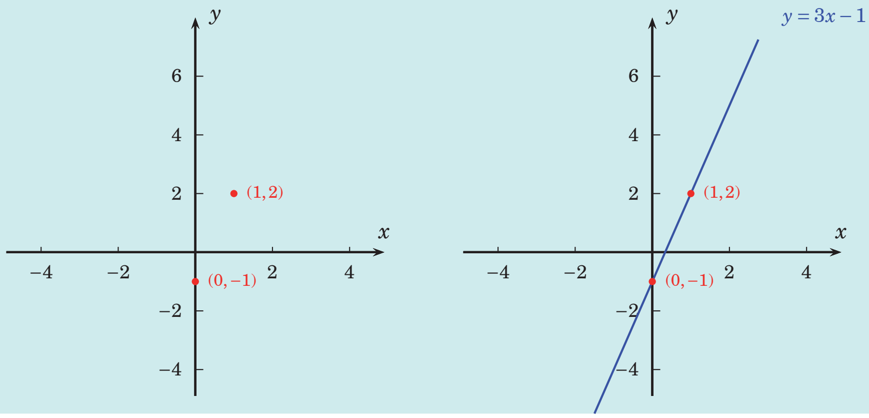
$$3(2)-1=6-1=5.$$

Podríamos, entonces, dibujar la recta de ecuación $y=3x-1$, si dibujáramos todos los puntos de esta recta. Sin embargo, esto no es necesario, pues de la Geometría sabemos que una recta queda determinada unívocamente por cualesquiera de dos de sus puntos. En otras palabras, para dibujar una recta, basta con dibujar dos de sus puntos.

Entonces, para dibujar la recta de ecuación $y=3x-1$, lo primero que debemos hacer es obtener dos de sus puntos. Para ello, es suficiente que asignemos dos valores cualesquiera a la variable x, y calculemos los correspondientes valores para la variable y:

1. si $x=0$, entonces $y=3(0)-1=-1$; es decir, la pareja ordenada $(0,-1)$ representa un punto que pertenece a la recta;
2. si $x=1$, entonces $y=3(1)-1=2$; luego, la pareja ordenada $(1,2)$ representa un punto que también pertenece a la recta.

Por lo tanto, para dibujar la recta de ecuación $y=3x-1$, es suficiente dibujar los puntos encontrados y unirlos utilizando una regla; obtendrás así la gráfica de la recta:



Ejemplo 2

En la ecuación

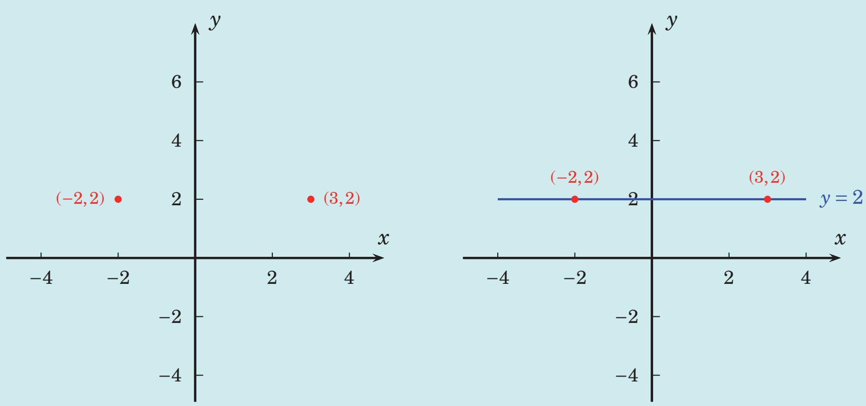
$$y = 2$$

no aparece la variable x. Y, sin embargo, esta ecuación sí representa una recta: cualquier par ordenado $(x, 2)$, donde x es un número real, representa un punto de dicha recta.

Para dibujarla, como ya lo sabes, es suficiente que determines dos puntos de la recta, lo que puedes lograr si das dos valores cualesquiera a x. Por ejemplo:

1. si $x = -2$, el punto de coordenadas $(-2, 2)$ es un punto de la recta;
2. si $x = 3$, el punto de coordenadas $(3, 2)$ también es un punto de la recta.

Ahora es suficiente que dibujes estos dos puntos y, con la ayuda de una regla, obtengas la gráfica de la recta de ecuación $y = 2$:



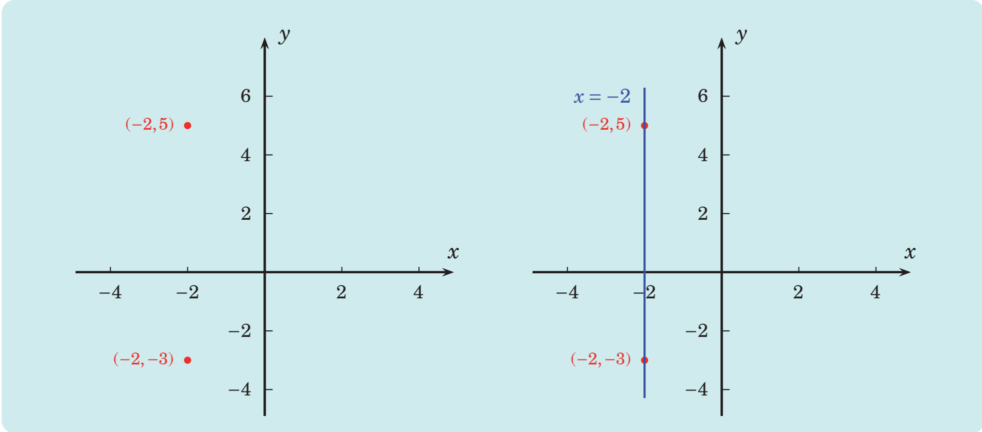
Ejemplo 3

En la ecuación

$$x = -2$$

no aparece la variable y. Sin embargo, esta ecuación también representa una recta en un sistema de coordenadas cartesianas: los puntos de esta recta están representados por cualquier par ordenado $(-2, y)$, en el que y es un número real.

Para dibujar esta recta, es suficiente con dar dos valores a y, y así determinar las coordenadas de dos puntos de la recta. Por ejemplo: si $y = -3$ y $y = 5$, dos puntos de la recta estarán representados por los pares ordenados $(-2, -3)$ y $(-2, 5)$, respectivamente. La gráfica de la recta de ecuación $x = -2$ es la siguiente:



En un sistema de coordenadas cartesianas:

- la ecuación de una recta no vertical es

$$y = ax + b.$$

Cuando $a = 0$, la recta es horizontal de ecuación

$$y = b.$$

- La ecuación de una recta vertical es

$$x = c.$$

Los dos primeros ejemplos son casos particulares de las rectas de ecuación

$$y = ax + b.$$

En el primer ejemplo, $a = 3$ y $b = -1$; en el segundo ejemplo, $a = 0$ y $b = 2$. Como puedes ver, las rectas de ecuación $y = b$ son rectas horizontales; es decir, paralelas al eje horizontal del sistema de coordenadas.

El caso general del tercer ejemplo está constituido por las rectas de ecuación

$$x = c.$$

En el caso del ejemplo, $c = -2$, todas las rectas que tienen esta ecuación son verticales; es decir, paralelas al eje vertical del sistema de coordenadas.

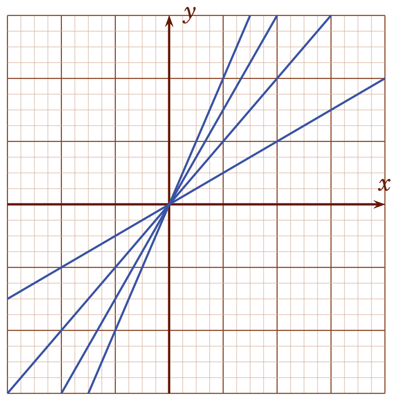
¡A practicar!

Ahora es tu turno; realiza la gráfica de cada una de las rectas cuyas ecuaciones se indican a continuación:

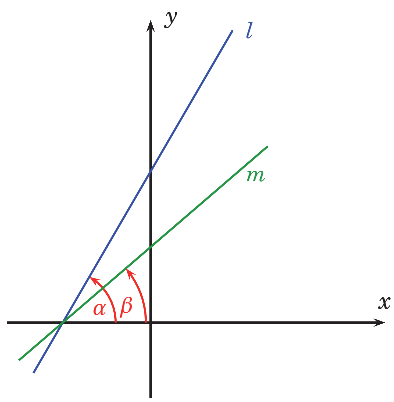
1. $y = x + 2$.
2. $y = -2x + 3$.
3. $y = -\dfrac{3}{4}$.
4. $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.
5. $x = -3{,}5$.
6. $y = 0{,}5x + 0{,}1$.
7. $2x - 3y = 5$.
8. $x = -2y + 1$.
9. $3x + 2y = 1$.

La pendiente de una recta

La *elevación* de una recta es una característica que permite distinguirla de otras rectas. Mira la figura siguiente:

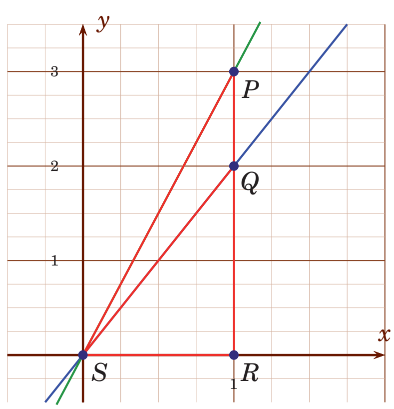


Todas las rectas pasan por el origen, pero tienen elevaciones distintas. Un método para medir la inclinación de una recta es a través del ángulo que forma la recta con el eje horizontal:



Fíjate que mientras más elevada está una recta, la medida del ángulo que forma con el eje horizontal es mayor: si α es la medida del ángulo que forman la recta l y el eje horizontal y β es la medida del ángulo que forman la recta m y el eje horizontal, entonces $\alpha > \beta$, pues l está más elevada que m.

Ahora presta atención a la figura siguiente:



Hemos determinado dos triángulos rectángulos: $\triangle SPR$ y $\triangle SQR$. En lugar de medir los ángulos entre las rectas y el eje horizontal directamente, gracias al sistema de coordenadas, vamos a establecer la elevación de cada recta a través de una relación entre los catetos de los triángulos que hemos dibujado.

Observa el triángulo $\triangle SPR$. ¿Cuál es la longitud del cateto $\overline{PR}$? ¿Y la del cateto $\overline{SR}$?

Tenemos que:

La longitud del cateto $\overline{PR}$ es igual a $3-0$ y La longitud del cateto $\overline{SR}$ es igual a $1-0$.

Compara ambos catetos entre sí:

$$\frac{\text{La longitud del cateto } \overline{PR}}{\text{la longitud del cateto } \overline{SR}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Ahora procedamos de manera similar con el triángulo $\triangle SQR$. Tenemos que

La longitud del cateto $\overline{QR}$ es igual a $2-0$ y La longitud del cateto $\overline{SR}$ es igual a $1-0$.

Compara ambos catetos entre sí:

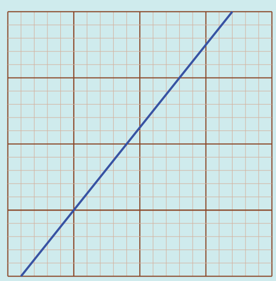
$$\frac{\text{La longitud del cateto } \overline{QR}}{\text{La longitud del cateto } \overline{SR}} = \frac{2}{1} = 2.$$

En ambos casos hemos utilizado una *razón* para comparar los catetos entre sí. A esta razón se le llama *pendiente de la recta*.

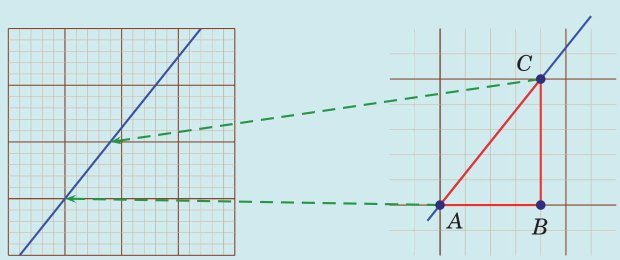
La razón calculada para la primera recta es mayor que la razón para la segunda recta, pues, aunque en ambos casos el cateto horizontal es el mismo, el vertical de la primera recta tiene una longitud mayor al cateto vertical en la segunda recta. En general, *una recta más elevada tiene una pendiente mayor*.

Ejemplo 4

Calcula la pendiente de la recta dada en la figura:



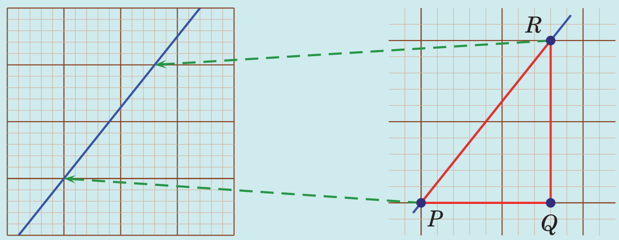
Solución. En primer lugar, elijamos dos puntos en la recta para construir un triángulo rectángulo de la siguiente manera:



En segundo lugar, calculemos la longitud de cada uno de los catetos: $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$, y comparémoslas a través de su razón:

$$\text{Pendiente de la recta } = \frac{AB}{CB} = \frac{5}{4}.$$

También podemos usar otro triángulo con el mismo propósito:



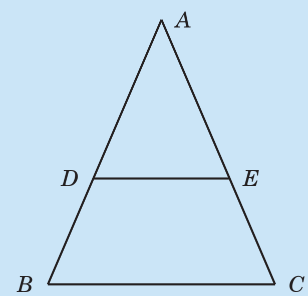
En este caso, tenemos que:

$$\text{Pendiente de la recta } = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

Mira que en ambos triángulos la relación entre las longitudes de los catetos es la misma.

Que la relación entre las longitudes de los catetos en cada triángulo sea la misma no es ninguna casualidad. ¿Por qué? Porque los triángulos son semejantes; es decir, la proporción que hay entre dos pares de lados de uno de los triángulos es la misma que hay entre los dos lados correspondientes del segundo triángulo. Esta propiedad se conoce con el nombre de *teorema de Tales de la proporcionalidad*.

Teorema de Tales

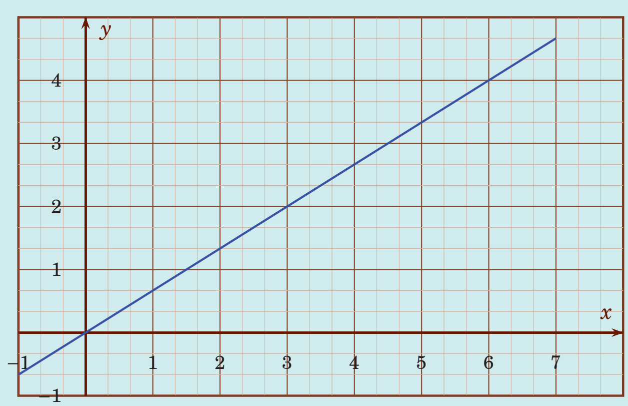


Si el segmento $\overline{DE}$ es paralelo al lado $\overline{BC}$, entonces

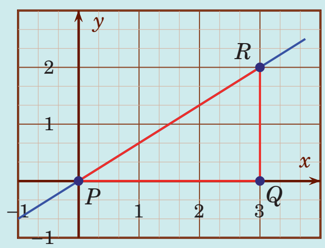
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}.$$

Ejemplo 5

Calcula la pendiente de la recta dada en la figura:



Solución. Para construir un triángulo que nos permita calcular la pendiente de la recta, escojamos un punto fácil de leer en la gráfica dada; por ejemplo: el de coordenadas $(3,2)$. Este será uno de los vértices del triángulo buscado; los otros dos vértices serán los puntos de coordenadas $(0,0)$ y $(3,0)$, respectivamente:



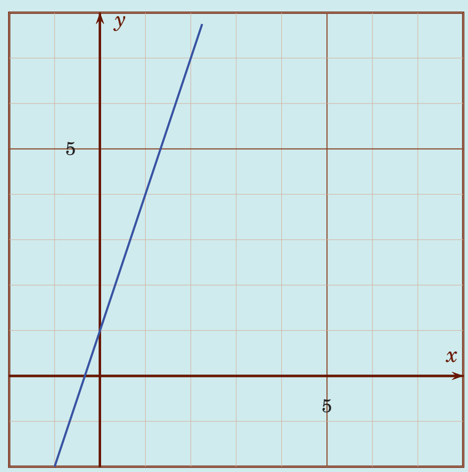
Ahora medimos las longitudes de los catetos y las comparamos entre sí mediante su razón:

$$\text{Pendiente de la recta } = \frac{\text{La longitud del cateto } \overline{RQ}}{\text{La longitud del cateto } \overline{PQ}} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3}.$$

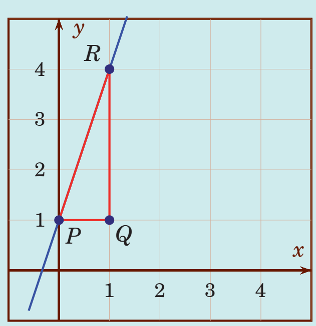
Un ejemplo más:

Ejemplo 6

Calcula la pendiente de la recta dada en la figura:



Solución. Encontremos tres puntos cuyas coordenadas sean fáciles de hallar para obtener el triángulo rectángulo. Por ejemplo: los puntos de coordenadas $(0,1)$, $(1,1)$ y $(1,4)$:



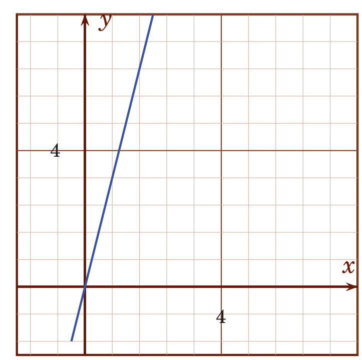
Entonces:

$$\text{La pendiente de la recta } = \frac{\text{La longitud del cateto } \overline{RQ}}{\text{La longitud del cateto } \overline{PQ}} = \frac{4-1}{1-0} = 4.$$

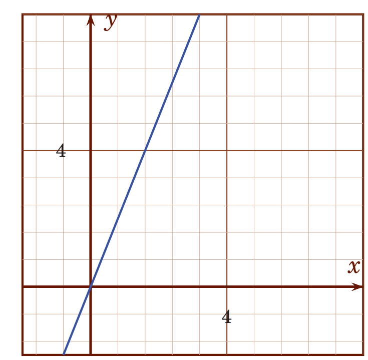
¡A practicar!

Ahora es tu turno.

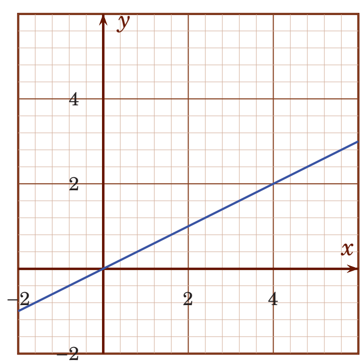
Encuentra la pendiente de las rectas dadas en las siguientes figuras:



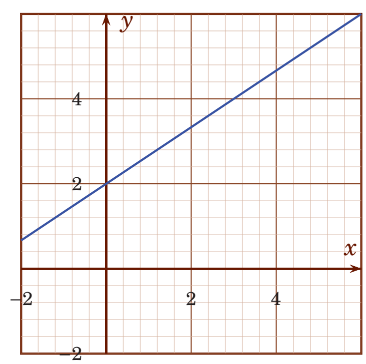
(a)



(b)



(c)



(d)

El caso general

Ahora vamos a generalizar el proceso utilizado en el ejemplo anterior. En un sistema de coordenadas cartesianas, cuando una recta no es vertical podemos calcular su pendiente de la siguiente manera.

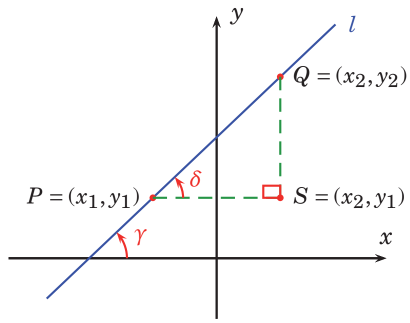
En primer lugar, supón que la ecuación de la recta es

$$y = ax + b$$

y que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) representan dos puntos cualesquiera y distintos de la recta. Esto quiere decir que satisfacen la ecuación de la recta:

$$y_1 = ax_1 + b \quad \text{y} \quad y_2 = ax_2 + b.$$

Nombra con P y Q estos puntos, respectivamente, como se muestra en la figura:



El triángulo $\triangle PQS$ es rectángulo, pues los segmentos $\overline{PS}$ y $\overline{QS}$ son paralelos a los ejes horizontal y vertical, respectivamente. Y por esta misma razón, $\gamma = \delta$, si γ es la medida del ángulo que forma la recta con el eje horizontal y δ, la medida del ángulo de vértice P.

De modo que, para "medir indirectamente" el ángulo que forma la recta con el eje horizontal, se utiliza el cociente entre las longitudes de los cateto opuesto y cateto adyacente al ángulo $\angle QPS$:

$$\frac{QS}{PS} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Este cociente es constante; es decir, no depende de los puntos P y Q que hayas elegido en la recta, como lo puedes constatar inmediatamente:

$$\begin{aligned}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1}\\ &= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1}\\ &= \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a.\end{aligned}$$

Es decir:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.1}$$

A este número se lo denomina *pendiente* de la recta de ecuación $y = ax + b$.

La pendiente de una recta

- La pendiente de una recta de ecuación

  $$y = ax + b$$

  es el número a.
- Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) representan dos puntos distintos de una recta no vertical, la pendiente de la recta se calcula mediante la fórmula

  $$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$
- La pendiente de una recta vertical no está definida. La recta forma un ángulo de 90 grados con el eje horizontal.

Ejemplo 7

No necesitamos realizar ningún cálculo para saber que la pendiente de la recta de ecuación $y = 3x - 1$ es igual a 3. En cambio, para encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(2, 3)$ y $(3, 6)$, utilizamos la fórmula (2.1).

Para ello, podemos asignar los valores $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $x_2 = 3$ y $y_2 = 6$. Entonces, la pendiente de esta recta es:

$$a = \frac{6 - 3}{3 - 2} = 3.$$

Si ahora realizas otra vez el cálculo de la pendiente, pero intercambiando las asignaciones,

$$x_1 = 3,\ y_1 = 6,\ x_2 = 2,\ y_2 = 3,$$

obtienes el mismo valor de la pendiente, sin importar qué pareja nombres como (x_1, y_1) o (x_2, y_2).

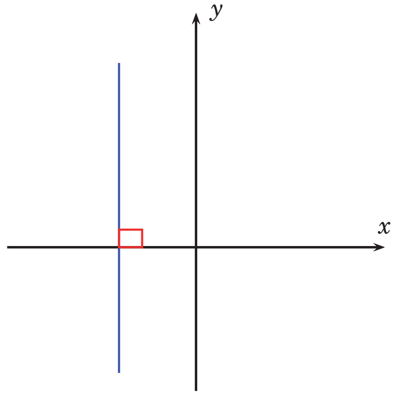
Ahora veamos cuál es la pendiente de una recta vertical. Tal vez te preguntes por qué no se puede aplicar la fórmula (2.1) en este caso. Para ello, veamos antes lo que sucede en el caso de las rectas no verticales. Dos puntos cualesquiera de una recta no vertical son diferentes; es decir, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se corresponden a dos puntos de una recta no vertical, los números x_1 y x_2 son diferentes, de modo que sí se puede realizar el cociente en la fórmula (2.1). En cambio, todos los puntos de una recta vertical tienen la misma abscisa.

En efecto, supón que la ecuación de la recta vertical sea $x = c$. Entonces, todos los puntos de esta recta están representados por los pares ordenados de la forma

$$(c, y).$$

Como se puede ver, todos tienen la misma abscisa: el número c.

Para una recta vertical, se suele decir que su pendiente no *existe* cuando su pendiente no está definida. En este caso, la recta está "totalmente elevada" respecto del eje horizontal y el ángulo que forman la recta y este eje mide 90 grados:



¡A practicar!

Ahora es tu turno.

1. Encuentra la pendiente de las rectas cuyas ecuaciones son:

(a) $y = 2x + 1.$

(b) $y = -\frac{3}{5}x - 2.$

(c) $y = -4.$

(d) $x = 5.$

(e) $y = -2x - 5.$

(f) $x - 3y = 4.$

(g) $2x = 4y - 8.$

(h) $y - x + 7 = 0.$

2. Halla la pendiente de las rectas que pasan por el siguiente par de puntos:

(a) $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.

(b) $(2, -3)$ y $(-2, -3)$.

(c) $(1, -3)$ y $(1, 3)$.

(d) $(-3, 2)$ y $(1, 4)$.

(e) $(-3, -4)$ y $(-1, -1)$.

(f) $(0, 7)$ y $(0, 3)$.

(g) $(6, 1)$ y $(3, 8)$.

(h) $(5, -2)$ y $(10, 3)$.

3. ¿Cuál es el valor de la pendiente de una recta horizontal? ¿Por qué?

El corte de la recta con el eje vertical

El corte de la recta con el eje vertical es el punto donde la recta y el eje vertical se intersecan. Como todos los puntos del eje vertical tienen abscisa igual a 0, la abscisa del corte es igual a 0; de allí que el corte de la recta de ecuación $y = 3x - 1$ y el eje vertical se calcule evaluando la ecuación cuando $x = 0$:

$$y = 3(0) - 1 = -1.$$

Por lo tanto, el corte de la recta con el eje vertical es el punto de coordenadas $(0,-1)$.

En general, el corte de la recta de ecuación $y = ax + b$ con el eje vertical es el punto de coordenadas $(0, b)$. Una recta vertical, que no sea el propio eje vertical, no corta el eje vertical, porque todos los puntos de la recta tienen una abscisa distinta de cero. Por ejemplo: el corte de la recta $y = x + 5$ con el eje vertical es el punto de coordenadas $(0, 5)$.

También podemos determinar el corte de la recta con el eje horizontal. Este es el punto de intersección de la recta con el eje horizontal. Como la ordenada de todo del eje horizontal es igual a 0, entonces la ordenada del corte de la recta con el eje horizontal es igual a 0. De allí que el corte de la recta de ecuación $y = 3x - 1$ se obtenga evaluando la ecuación en $y = 0$:

$$0 = 3x - 1,$$

de donde se obtiene

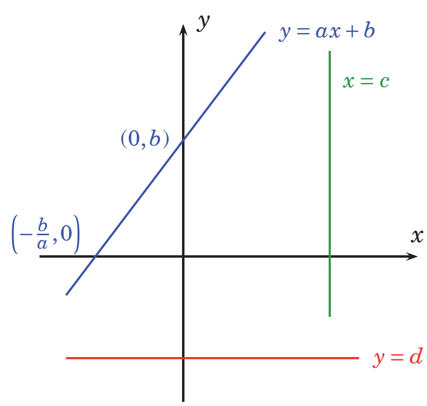
$$x = \frac{1}{3}.$$

En consecuencia, el corte de la recta con el eje x es el punto de coordenadas $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

En general, el corte de la recta de ecuación $y = ax + b$ es el punto de coordenadas

$$\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$$

si $a \neq 0$. Cuando $a = 0$, la recta es horizontal y, salvo que sea el propio eje horizontal, la recta no corta el eje horizontal.



¡A practicar!

Ahora es tu turno:

1. Encuentra el corte de las rectas dadas con los ejes vertical y horizontal:

   (a) $y = 2x + 1$.

   (b) $y = 2x + 2$.

   (c) $y = 2x - 5$.

   (d) $y = 2x - 4$.

   (e) $y = 2x - 1$.

2. Compara los cortes de las rectas en el ítem anterior.

3. Grafica las rectas del primer ítem. ¿Qué aspecto tienen en común las gráficas de las rectas? ¿En qué aspecto difieren?

Ecuación de una recta

En este capítulo se presentarán situaciones con cierta información sobre una recta, de la que no conocemos su ecuación. Determinarla es una tarea importante.

Si la información que tenemos es:

1. Si conocemos la pendiente a y el corte con el eje vertical $(0, b)$, entonces la ecuación de la recta es:
$$y = ax + b.$$

2. En cambio, si lo que conocemos son dos puntos que pertenecen a la recta, para obtener la ecuación de la recta, primero estableceremos la pendiente y luego el corte con el eje vertical.

Veamos un ejemplo cuando conoces la pendiente y el corte con el eje vertical.

Ejemplo 8

Determina la ecuación de la recta con pendiente -4 *y corta el eje* y *en el punto* $(0,5)$.

Solución. Como la pendiente es distinta de 0, la recta buscada no es horizontal ni tampoco vertical. Si su ecuación es $y = ax+b$, entonces el coeficiente a es el número -4 y el coeficiente b, el número 5. Por lo tanto, la ecuación de dicha recta es $y = -4x + 5$.

Ahora veamos un ejemplo cuando conoces dos puntos de la recta.

Ejemplo 9

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1,1)$ *y* $(0,5)$.

Solución. En primer lugar, las abscisas de los puntos que están en la recta son diferentes. Entonces, se trata de una recta que no es vertical. Supongamos que su ecuación es

$$y = ax + b.$$

En segundo lugar, a es la pendiente de la recta; la podemos calcular mediante la fórmula (2.1) de la página 52:

$$a = \frac{5-1}{0-1} = \frac{4}{-1} = -4.$$

Y como la recta pasa por el punto $(0,5)$, este es el punto de corte de la recta y el eje vertical, de modo que el coeficiente b es 5. Entonces, la ecuación de la recta es $y = -4x + 5$.

El coeficiente b pudo haber sido calculado de otra forma. Como $a = -4$, entonces la ecuación de la recta luce así:

$$y = -4x + b.$$

Como la recta pasa por el punto $(1,1)$, entonces $x = 1$ y $y = 1$ satisfacen la ecuación de la recta; es decir, se verifica la igualdad:

$$1 = -4(1) + b.$$

Al resolver esta ecuación, encontramos que b es igual a 5. Sabemos, entonces, que la ecuación de la recta es $y = -4x + 5$.

Ejemplo 10

(a) *Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $(1,-3)$ *y* $(2,-3)$.

(b) *Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $(2,1)$ *y* $(2,5)$.

Solución.

(a) La recta que pasa por los puntos $(1,-3)$ y $(2,-3)$ es horizontal, pues las ordenadas de los dos puntos son iguales; luego, la recta es horizontal. Por lo tanto, su ecuación es $y=-3$.

(b) La recta que pasa por los puntos de coordenadas $(2,1)$ y $(2,5)$ es vertical, porque las abscisas de los dos puntos son iguales. Entonces su ecuación es $x=2$.

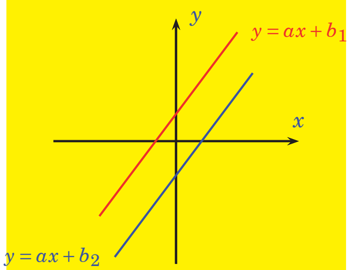
Rectas paralelas

Las rectas cuyas ecuaciones son

$$y=ax+b_1 \quad \text{y} \quad y=ax+b_2$$

son paralelas.

Recíprocamente, dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.



Rectas perpendiculares

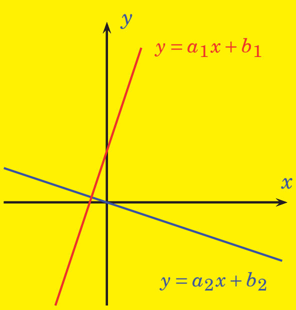
Si las ecuaciones de dos rectas son

$$y=a_1x+b_1 \quad \text{y} \quad y=a_2x+b_2,$$

y satisfacen la condición

$$a_1a_2=-1,$$

entonces las rectas son perpendiculares.



Ejemplo 11

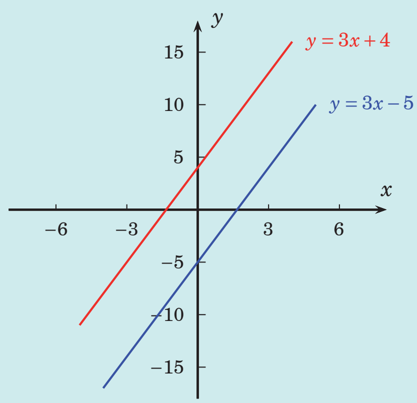
Encuentra la ecuación de una recta que sea paralela a la recta de ecuación $y=3x-5$ y que corte el eje vertical en el punto de coordenadas $(0,4)$.

Solución. La recta buscada, al ser paralela a la recta de ecuación $y=3x-5$, tiene la misma pendiente que esta; por lo tanto, si la ecuación de la recta buscada es

$$y=ax+b,$$

entonces $a=3$. Y como la ordenada del corte con el eje vertical es 4, entonces debe cumplirse que $b=4$. Por lo tanto, la recta buscada tiene ecuación $y=3x+4$.

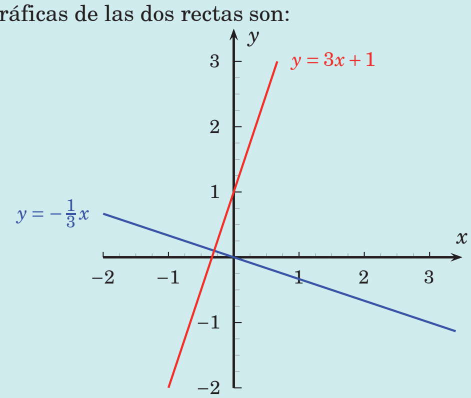
Las gráficas de ambas rectas ilustran la relación de paralelismo entre ambas:



Ejemplo 12

Dibuja cuidadosamente las rectas con ecuaciones $y=3x+1$ y $y=-\frac{1}{3}x$, para que puedas medir el ángulo que forman las rectas. ¿Cuál es la medida de este ángulo?

Solución. Las gráficas de las dos rectas son:



Si las has dibujado con precisión, podrás "ver" que las dos rectas forman un ángulo recto (cuya medida es 90 grados); es decir, las rectas son perpendiculares entre sí. Nota que el producto de las dos pendientes es -1:

$$3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1.$$

¡A practicar!

Ahora es tu turno.

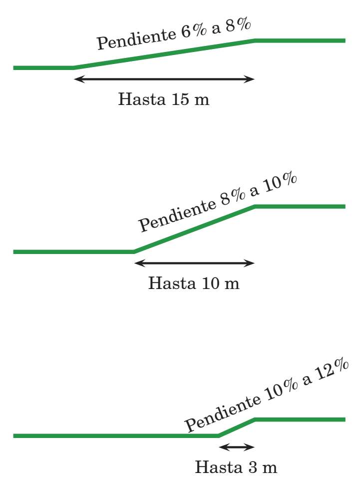
En todos los casos, determina la ecuación de la recta.

1. Con pendiente 3 y corte con el eje vertical el punto $(0,-5)$.
2. Con pendiente $-\frac{1}{2}$ y corte con el eje vertical el punto $(0,1/3)$.
3. Que pase por el origen y tenga pendiente 3.
4. Con pendiente cero y corte con el eje vertical el punto $(0,2)$.
5. Que pase por los puntos de coordenadas $(1,2)$ y $(-3,4)$.
6. Con corte en el eje vertical en el punto de coordenadas $(0,4)$ y corte en el eje x en el punto $(2,0)$.
7. Que pase por el origen y sea paralela a la recta $y = 3x - 1$.

Investigación: diseño de una rampa

La ley para discapacitados desea asegurar que las personas con alguna discapacidad tengan acceso a edificios y parques públicos. Para ello, el Instituto Ecuatoriano de Normalización (INEN) ha establecido una normativa para la construcción de una rampa (NTE INEN 2245:00), la misma que está ilustrada en el gráfico del margen.

Tu curso quiere organizar una kermés que se va a realizar en un salón del colegio. Para ingresar a este, se deben subir cuatro gradas, con una altura total de 80 centímetros por encima del piso. Para cumplir con la norma técnica 2245:00, tu curso debe instalar una rampa.



Normativa NTE INEN 2245:00

1. Observa las tres gráficas de la norma técnica. ¿Por cuál de las tres rampas la subida es más difícil?
2. ¿Cómo se mide la inclinación de la rampa? Piensa en el significado de la palabra *pendiente*. Determina el significado de la pendiente en el caso de la segunda ilustración.
3. Una cierta rampa mide 2 metros de base y tiene una altura de 1 metro. ¿Cumple esta rampa con la normativa técnica 2245:00 del INEN? ¿Por qué? ¿Cuánto mide la pendiente? ¿Cómo la calculaste?
4. Si la pendiente de una rampa es 0,1 y la base mide 3 metros, ¿hasta qué altura sube la rampa? Si la pendiente es 0,1 y la base mide 10 metros, ¿hasta qué altura sube la rampa?
5. Observa la primera gráfica. ¿Cuál es el rango para la altura de una rampa en el caso de la primera ilustración?

6. Es tu turno de diseñar la rampa. Calcula la base de manera que la pendiente de la rampa cumpla con la normativa del INEN.

7. Observa tu entorno. ¿Existen rampas en todos los espacios públicos? Discute con tus compañeros cómo la inexistencia de rampas impide que personas con discapacidades físicas realicen muchas de sus actividades.

Función lineal

Para la investigación del *diseño de una rampa*, tomaste en cuenta la relación que existe entre la altura y la base de la rampa, relación que es lineal. Si la variable independiente x representa la longitud de la base y la dependiente y, la altura, entonces hay una ecuación lineal $y = ax + b$ que describe la relación entre la altura y la base.

La ecuación lineal $y = ax + b$ representa la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax + b. \end{aligned}$$

A esta función la denominamos *lineal*.

Ejemplo 13

Consideremos la función lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x + 3. \end{aligned}$$

La función f está *representada por la ecuación lineal*

$$y = 2x + 3.$$

Ahora evaluemos la función en f en 0, -2 y 1. Tenemos que:

$$f(0) = 2(0) + 3 = 3, \quad f(-2) = 2(-2) + 3 = -1 \quad \text{y} \quad f(1) = 2(1) + 3 = 5.$$

Podemos, entonces, escribir:

$$0 \longmapsto 3, \quad -2 \longmapsto -1 \quad \text{y} \quad 1 \longmapsto 5,$$

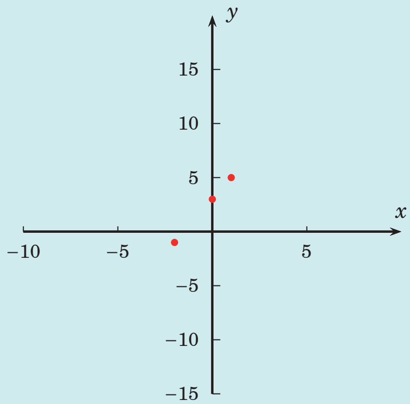
y decir que:

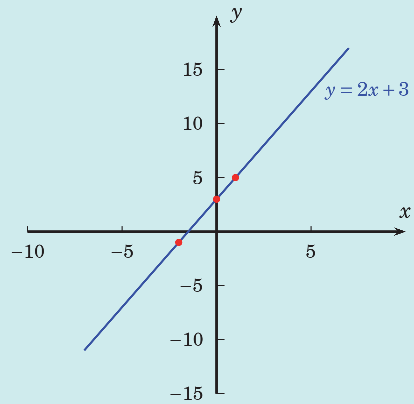
- La imagen de 0 respecto de f es 3 y la preimagen de 3 es 0.
- La imagen de -2 respecto de f es -1 y la preimagen de -1 es -2.
- La imagen de 1 respecto de f es 5 y la preimagen de 5 es 1.

A partir de las imágenes y preimágenes, podemos elaborar la siguiente tabla de valores, que es la *representación mediante tablas* de la función lineal f:

x	y
0	3
-2	-1
1	5

Con estos valores, podemos realizar la gráfica de la función, que es la *representación mediante una gráfica* de la función lineal f:





Esta recta, con ecuación $y = 2x + 3$, es, por lo tanto, la representación gráfica de la función lineal f.

Finalmente, la *representación verbal de la función* f es la siguiente:

A cada número real x le corresponde la suma del producto de 2 y x con 3.

A partir de este ejemplo, podemos generalizar que, dada la función lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax + b, \end{aligned}$$

esta puede ser representada por:

- la ecuación lineal
$$y = ax + b.$$
- Por una tabla, en la que es suficiente consignar dos pares de valores.
- Por una recta no vertical, que es la gráfica de la recta de ecuación
$$y = ax + b,$$
pues la gráfica de una función es el conjunto de todos los pares ordenados $(x, f(x))$; es decir, en este caso, por todos los puntos cuyas coordenadas son $(x, ax + b)$.
- Por la siguiente expresión verbal: a cada número real x le corresponde la suma del producto de a y x con b.

A diferencia de la ecuación de una recta no vertical, la de una recta vertical no es la representación de una función lineal. En efecto, si la ecuación es $x = a$, el gráfico de esta recta te muestra claramente que no puede ser el gráfico de una función, pues el número a tiene más de una imagen.

Dominio y recorrido de una función lineal

Considera la función lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax + b. \end{aligned}$$

Sin importar el valor de x, $f(x)$ siempre puede ser calculada: es igual al número real $ax + b$. Esto quiere decir que el dominio de la función f es $\mathbb{R}$; es decir, $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

El dominio de una función lineal es $\mathbb{R}$, el conjunto de todos los números reales.

Así como podemos calcular el valor de y cuando sabemos x, también podemos encontrar el valor de x cuando sabemos y.

Por ejemplo: supongamos que la función lineal f está representada por la ecuación

$$y = 3x + 1,$$

y que conocemos que $y = 7$. Entonces, a partir de esta igualdad puedes encontrar el valor correspondiente a x, pues

$$7 = 3x + 1,$$

de donde, al despejar x, obtenemos que

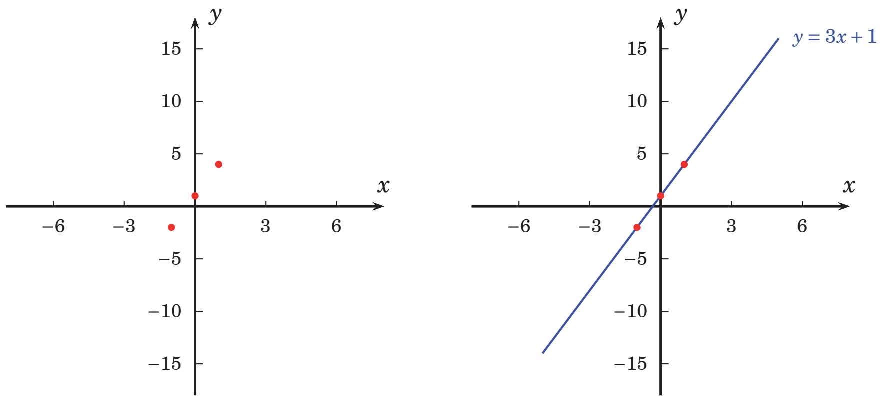
$$6 = 3x,$$

y de allí, que $x = 2$. Entonces

$$f(2) = 7.$$

Luego, el número 2 es la preimagen de 7, y la imagen de 2 es 7.

Ahora miremos la gráfica de la función f:



De la gráfica observamos que para cualquier valor y, siempre podemos encontrar el valor de x, de manera que $y = f(x)$.

Por ejemplo: si $y = 4$, el punto de coordenadas $(1,4)$, que pertenece a la recta, nos informa que $x = 1$; es decir, que la imagen de $x = 1$ es $y = 4$; puedes escribir: $f(1) = 4$.

En conclusión, el recorrido de la función f es $\mathbb{R}$. Y de manera general:

El recorrido de una función lineal es $\mathbb{R}$.

¡A practicar!

Es tu turno.

1. Dada la función lineal f definida por $f(x) = -3x + 2$:

   (a) Evalúa f en $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$.

   (b) Describe la función mediante una tabla de valores.

   (c) Representa la función por medio de una gráfica.

   (d) Describe la función de manera verbal.

   (e) Encuentra la preimagen de -4.

2. La función f es una función lineal tal que $f(1) = 3$ y $f(3) = 7$.

   (a) Representa la función mediante una gráfica.

   (b) Utiliza la gráfica para encontrar la imagen de 2 y $f(0)$.

   (c) Emplea la gráfica para hallar x de manera que $f(x) = 0$.

Cambio y variación de una función lineal

Cuando construimos una tabla de valores para graficar una función, asignamos distintos valores a la variable x y, consecuentemente, encontramos los correspondientes valores para la variable $f(x)$. Por ejemplo: si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función lineal definida por

$$f(x) = 2x + 3,$$

podemos construir la tabla de valores siguiente:

x	$f(x)$
0	3
1	5
2	7

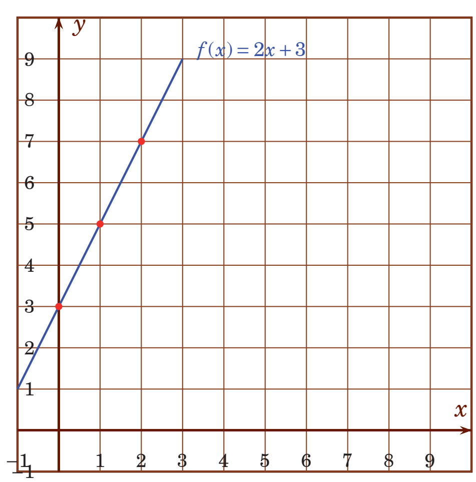
Es decir: cuando x *cambia*, entonces también $f(x)$ *cambia*:

1. Cuando x cambia de 0 a 1, la variable $f(x)$ cambia de 3 a 5. En este caso, decimos que si x cambia en 1 unidad, $f(x)$ cambia en 2. Entonces decimos que cuando x cambia en 1 unidad, la función f cambia en 2 unidades.

2. Cuando x cambia de 0 a 2, la variable $f(x)$ cambia de 3 a 7. En este caso, decimos que si x cambia en 2 unidades, entonces $f(x)$ cambia en 4. Entonces podemos decir que cuando x cambia en 2 unidades, la función f cambia en 4 unidades.

Cuando x cambia de 1 a 2, ¿cómo cambia la función lineal f?

Ahora miremos estas relaciones entre los cambios de x y f gráficamente:



Utilizamos esta gráfica para medir los cambios. Por ejemplo: mediante los puntos de coordenadas $(0,3)$ y $(1,5)$, vemos que la primera coordenada x cambia en 1 unidad, mientras que la segunda coordenada y cambia en 2 unidades.

Si recuerdas el estudio sobre la pendiente de la recta, entonces te parecerá natural que ahora hablemos de la pendiente como una razón de cambios:

$$\text{La pendiente de la recta } = \frac{\text{cambio en } f(x)}{\text{cambio en } x} = \text{razón de cambio de } f(x) \text{ relativo a } x.$$

En general, ahora considera la función lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax+b. \end{aligned}$$

Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos de la recta de ecuación

$$y = ax+b,$$

entonces siempre se verifican las siguientes igualdades:

$$y_1 = ax_1 + b \quad \text{y} \quad y_2 = ax_2 + b;$$

es decir, se verifican las igualdades:

$$y_1 = f(x_1) \quad \text{y} \quad y_2 = f(x_2).$$

Por otro lado, la pendiente de la recta que representa gráficamente a la función f es a, y es igual a

$$a = \frac{y_2 - x_2}{x_2 - x_1},$$

la cual puede ser expresada de la manera siguiente:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Vista de este modo, la pendiente adquiere el siguiente significado en términos de la función f.

Observemos que si el cambio en x es $x_2 - x_1$, el cambio en $f(x)$ es

$$f(x_2) - f(x_1).$$

Por lo tanto, la razón

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

mide el cambio de la función *relativo* al cambio entre x_1 y x_2. Este cambio relativo, como hemos visto, es constante, siempre vale lo mismo: ¡la pendiente de la recta que representa a la función lineal f! Esta propiedad caracteriza a las funciones lineales.

La *tasa de cambio de la función lineal* f es la relación entre el cambio de $f(x)$ con respecto al cambio de x:

$$\text{tasa de cambio de la función lineal } f = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Este cociente es constante e igual a la pendiente de la recta que la representa; es decir, si

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax+b, \end{aligned}$$

entonces:

$$\text{tasa de cambio de la función lineal } f = a.$$

Ejemplo 14

Calcula la tasa de cambio de la función lineal si sabes que $f(2)=6$ *y* $f(5)=9$.

Solución. Podemos calcular de esta forma:

$$\begin{aligned} \text{tasa de cambio de } f &= \frac{f(5)-f(2)}{5-2} \\ &= \frac{9-6}{5-2} = \frac{3}{3} = 1, \end{aligned}$$

o de esta otra:

$$\begin{aligned} \text{tasa de cambio de } f &= \frac{f(2)-f(5)}{2-5} \\ &= \frac{6-9}{2-5} = \frac{-3}{-3} = 1. \end{aligned}$$

¡A practicar!

Ahora es tu turno.

1. Para cada caso, encuentra la tasa de cambio de la función f.

   (a) $f(3)=1$ y $f(-1)=8$.

   (b) $f(-3)=1$ y $f(1)=4$.

   (c) La siguiente es una tabla que representa a f:

x	$f(x)$
-1	2
1	6
2	8

   (d) La función lineal f está definida por $x \longmapsto 5x+1$.

En una función lineal $f\colon x \longmapsto ax+b$, además de medir el cambio de la función f cuando x cambia, el coeficiente a nos permite saber si la función aumenta o disminuye cuando x aumenta.

Si f aumenta cuando x también lo hace, diremos que la función f crece o que es *creciente*. Y si f disminuye cuando x aumenta, entonces diremos que f decrece o que es *decreciente*.

Ejemplo 15

Determina la tasa de cambio (o variación relativa) de la función lineal definida por

$$f(x) = \frac{5}{2}x + 4.$$

(a) *Interpreta la variación o tasa de cambio de f.*

(b) *Si la variable x aumenta en dos unidades, ¿cuánto cambia (aumenta o disminuye) la función? ¿Y si la variable x disminuye en dos unidades?*

(c) *Si la variable x aumenta en cuatro unidades, ¿cuánto cambia (aumenta o disminuye) la función?*

Solución. La tasa de cambio o variación de la función es el coeficiente de x en

$$f(x) = \frac{5}{2}x + 4.$$

Por lo tanto:

$$\text{tasa de cambio de la función lineal } f = \frac{5}{2}.$$

(a) Que la variación o tasa de cambio de f sea $\frac{5}{2}$ significa que cuando x cambia en 2 unidades, $f(x)$ cambia en 5 unidades.

Por ejemplo: si x cambia de 4 a 6, entonces, sin necesidad de realizar ningún cálculo adicional, podemos afirmar que

$$f(6) - f(4) = 5,$$

pues

$$\frac{5}{2} = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 2} = \frac{f(6) - f(4)}{2}.$$

En resumen, el *aumento* de 4 a 6 significa un *aumento* de $f(4)$ a $f(6)$ en 5 unidades.

(b) Supongamos que x aumenta en 2 unidades. Entonces, $f(x)$ cambiará en 5 unidades, sin importar el valor de x, ya que la tasa de cambio de una función lineal es constante. Pero, ¿aumentará o disminuirá esas 5 unidades?

Igual que en el punto anterior, hay que realizar un cálculo adicional para averiguarlo:

$$\begin{aligned} f(x+2) - f(x) &= \left(\frac{5}{2}(x+2) + 4\right) - \left(\frac{5}{2}(x) + 4\right) \\ &= \left(\frac{5}{2}x + 5 + 4\right) - \left(\frac{5}{2}x + 4\right) \\ &= 5. \end{aligned}$$

Como la diferencia es *positiva* (mayor que 0), para la función lineal f, el *aumento* de x en dos unidades significa también un *aumento* de $f(x)$ en 5 unidades.

De manera similar, podemos averiguar si $f(x)$ aumenta o disminuye en 5 unidades, si x disminuye en dos unidades:

$$\begin{aligned} f(x-2) - f(x) &= \left(\frac{5}{2}(x-2) + 4\right) - \left(\frac{5}{2}x + 4\right) \\ &= \left(\frac{5}{2}x - 5 + 4\right) - \left(\frac{5}{2}x + 4\right) \\ &= -5. \end{aligned}$$

Como la diferencia es *negativa*, $f(x)$ *disminuye* en 5 unidades cuando x *disminuye* en 2.

(c) Sabemos que por cada 2 unidades que aumenta x, $f(x)$ aumenta en 5 unidades. Luego, como la tasa de cambio es constante, si duplicamos el número de unidades en que cambia x, debemos duplicar el cambio en $f(x)$; por lo tanto, $f(x)$ deberá aumentar en

10 unidades:

$$\frac{5}{2} = \frac{5 \times 2}{2 \times 2} = \frac{10}{4}.$$

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 16

Determina la tasa de cambio (o variación relativa) de la función lineal

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -3x + 10. \end{aligned}$$

(a) Interpreta la variación de la función lineal g.

(b) Si la variable x aumenta en 1 unidad, ¿cuánto cambia (aumenta o disminuye) la función? ¿Y si disminuye en una unidad?

(c) Si la variable x disminuye en 4 unidades, ¿cuánto cambia (aumenta o disminuye) $g(x)$?

Solución. La tasa de cambio o variación relativa de la función lineal g es el coeficiente de x en

$$g(x) = -3x + 10.$$

Por lo tanto:

$$\text{tasa de cambio de la función lineal } g = -3.$$

(a) Que la variación o tasa de cambio de g sea -3 quiere decir que cuando x cambia en 1 unidad, $g(x)$ cambia en -3 unidades.

Por ejemplo: si x cambia de 4 a 5, entonces

$$-3 = \text{tasa de cambio de } g = \frac{g(5) - g(4)}{5 - 4} = \frac{g(5) - g(4)}{1}.$$

Por lo tanto:

$$-3 = g(5) - g(4),$$

lo que significa que $g(5) - g(4)$ es negativo; es decir, $g(5)$ es menor que $g(4)$. En otras palabras, el cambio de g es una disminución.

En resumen, cuando x aumenta en 1 unidad, la función g *disminuye* en 3 unidades.

(b) Supongamos que x aumenta en 1 unidad. Entonces, $g(x)$ cambiará en 3 unidades, sin importar el valor de x. Pero, ¿$g(x)$ aumentará o disminuirá en esas 3 unidades?

Para ello, calculemos la diferencia entre $g(x+1)$ y $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x+1) - g(x) &= [-3(x+1) + 10] - [-3x + 10] \\ &= [-3x - 3 + 10] - [-3x + 10] \\ &= -3. \end{aligned}$$

Como la diferencia es *menor que* 0, el *aumento* de x en una unidad significa una *disminución* de $g(x)$ en 3 unidades.

De manera similar:

$$\begin{aligned} g(x-1) - g(x) &= [-3(x-1) + 10] - [-3x + 10] \\ &= [-3x + 3 + 10] - [-3x + 10] \\ &= 3. \end{aligned}$$

Como la diferencia es *mayor que* 0, $g(x)$ *aumenta* en 3 unidades cuando x *disminuye* en 1.

(c) Por cada unidad de cambio en x, $g(x)$ cambia en 3. Por lo tanto, si x cambia en 4 unidades, $g(x)$ cambiará en 12 unidades.

De los ejemplos, podemos ver que:

- La tasa de cambio de la función lineal f es positiva; en este caso, un aumento en x significa un aumento en $f(x)$, y una disminución en x, una disminución en $f(x)$.
- La tasa de cambio de la función lineal g es negativa; en este caso, un aumento en x significa una disminución en $g(x)$, y una disminución en x, un aumento en $f(x)$.

Estos hechos también se cumplen en el caso general, lo que podemos verificar con facilidad de la siguiente manera.

Consideremos una función lineal cualquiera

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax+b. \end{aligned}$$

En primer lugar, supongamos que la tasa de cambio de h es positiva; es decir, supongamos que $a>0$. Esto quiere decir que si x cambia en una unidad, $h(x)$ debe cambiar en a unidades.

Ahora supongamos que x aumenta en una unidad; entonces:

$$\begin{aligned} h(x+1)-h(x) &= [a(x+1)+b]-[ax+b] \\ &= [ax+a+b]-[ax+b] \\ &= a>0. \end{aligned}$$

Como esta diferencia es mayor que 0, $h(x)$ aumentó a unidades.

Ahora, si x disminuye una unidad, tenemos que

$$\begin{aligned} h(x-1)-h(x) &= [a(x-1)+b]-[ax+b] \\ &= [ax-a+b]-[ax+b] \\ &= -a<0. \end{aligned}$$

Como esta diferencia es menor que 0, $h(x)$ disminuyó a unidades.

De manera similar, puedes analizar el caso en que la tasa de cambio de la función h es negativa.

Variación de una función lineal

- Si la tasa de cambio de una función lineal h es positiva, al aumentar x también aumenta $f(x)$; al disminuir x, $f(x)$ también disminuye.
- Si la tasa de cambio de una función lineal h es negativa, al aumentar x disminuye $f(x)$; al disminuir x, $f(x)$ aumenta.

Ejemplo 17

Considera la función lineal h tal que la imagen de -2 es 1 y la imagen de 1 es -5. Si x disminuye en 3 unidades, ¿en cuántas unidades cambia $h(x)$? ¿Aumenta o disminuye?

Solución. En primer lugar, tienes que averiguar la tasa de cambio de h. Para ello, vas a encontrar dos puntos que estén en la recta que representa a la función lineal h.

Como 1 es la imagen de -2, y -5 la de 1, tenemos que

$$h(-2)=1 \quad \text{y} \quad h(1)=-5.$$

Entonces, los puntos de coordenadas

$$(-2,1) \quad \text{y} \quad (1,-5)$$

están en la recta que representa a la función h. Por lo tanto, la tasa de cambio de h es la pendiente de la recta:

$$\begin{aligned}\text{tasa de cambio de } h &= \frac{1-(-5)}{-2-1}\\ &= \frac{6}{-3} = -2.\end{aligned}$$

Como la tasa de cambio es -2, si x aumenta una unidad, $h(x)$ disminuye 2; entonces, al aumentar 3, disminuirá en 6 unidades.

Monotonía de la función lineal

Recuerda que la monotonía de una función nos dice si una función es creciente, decreciente o ni una ni otra.

En el caso de las funciones lineales, la caracterización de su variación a través de la tasa de cambio de la función nos permite determinar fácilmente la monotonía de una función lineal.

Observa las tres gráficas del margen.

(a) La primera es una recta con pendiente positiva;

(b) la segunda tiene pendiente negativa; y

(c) la tercera tiene pendiente nula.

Las tres rectas representan las siguientes funciones lineales, respectivamente:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -2x+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 5 \end{aligned}.$$

Por lo tanto:

(a) la función f es creciente y su tasa de cambio es positiva;

(b) la función g es decreciente y su tasa de cambio es negativa; y

(c) la función h es constante y su tasa de cambio es igual a 0.

Estos hechos también se cumplen en el caso general, lo que puede ser verificado fácilmente.

Consideremos una función lineal cualquiera:

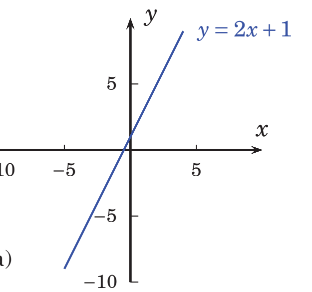
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax+b. \end{aligned}$$

Supongamos que la tasa de cambio de f sea positiva; es decir: $a>0$. Si x aumenta desde x_1 hasta x_2, entonces $f(x_1)$ aumentará hasta $f(x_2)$, independientemente de x_1 y x_2. Entonces, la función lineal f será una función creciente.

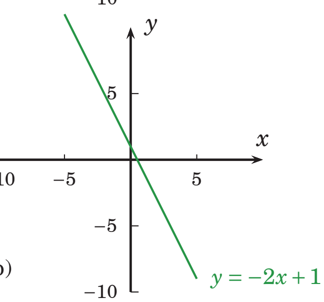
De manera similar podemos constatar que si la tasa de cambio de f es negativa, f será una función decreciente.

Ejemplo 18

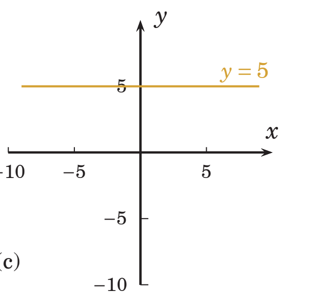
La función lineal f definida por $f(x) = -3x+2$ es decreciente; en cambio, la función lineal h definida por $h(x) = \frac{4}{7}x - 1$ es creciente.



(a)



(b)



(c)

Monotonía de una función lineal

- Si la tasa de cambio de una función lineal es positiva, entonces la función es creciente.
- Si la tasa de cambio de una función lineal es negativa, entonces la función es decreciente.

Ceros de la función lineal

Recuerda que, dada una función f, los ceros de f son todos números x del dominio de f para los cuales se verifica

$$f(x)=0.$$

Ejemplo 19

Encuentra el cero de la función $f(x)=4x-5$.

Solución. Para ello, debemos encontrar el número x tal que $f(x)=0$; es decir, debemos resolver la ecuación

$$4x-5=0.$$

Al despejar x, obtenemos que $x=\frac{5}{4}$. Entonces, el cero de f es el número $\frac{5}{4}$.

Considera la función lineal

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax+b. \end{aligned}$$

Entonces, los ceros de f serán todos los números reales x tales que

$$ax+b=0.$$

Si despejas x de esta igualdad, obtendrás que

$$x=-\frac{b}{a},$$

siempre que $a\neq 0$. En resumen, una función lineal no constante tiene un único cero.

El cero de una función lineal está relacionado con otro “cero”: el de la recta que representa la función lineal f.

En efecto, la recta que representa a f tiene por ecuación

$$y=ax+b.$$

Recuerda que el punto de coordenadas $(x,0)$ se obtiene al encontrar x a partir de la ecuación, cuando $y=0$. Este punto es, justamente, donde la recta y el eje horizontal se cortan.

El cero de una función lineal

El cero de una función lineal f definida por $f(x)=ax+b$ es

$$x=-\frac{b}{a}$$

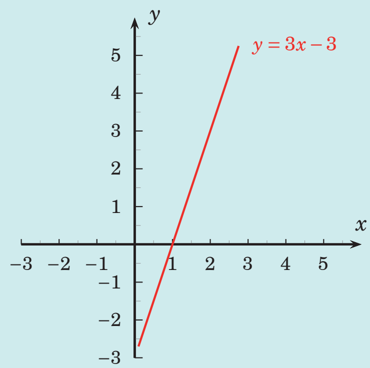
si $a\neq 0$.

Ejemplo 20

Realiza la gráfica de la función lineal f, definida por $f(x)=3x-3$, y encuentra:

1. *El valor de x donde $f(x)=0$.*
2. *El intervalo de valores x para los cuales $f(x)>0$.*
3. *El intervalo de valores de x para los cuales $f(x)<0$.*

Solución. La gráfica de la función f es la de la recta de ecuación $y=3x-3$:



Observamos que:

(a) $f(1) = 0$; por lo tanto $x = 1$ es el cero de la función f.

(b) $f(x) > 0$ cuando $x > 1$.

(c) $f(x) < 0$ cuando $x < 1$.

¡A practicar!

Ahora es tu turno.

1. Decide si la función lineal f es creciente o decreciente:

   (a) $f(x) = \frac{3}{4}x + 1$.

   (b) $f(x) = -\frac{1}{5}x + 6$.

   (c) $f(x) = 2x - 8$.

2. En cada uno de los ejercicios anteriores, determina en cuánto aumenta o disminuye f cuando x aumenta en 1 unidad.

3. En cada uno de los ejercicios anteriores, en cuánto aumenta o disminuye f si x aumenta en 2 unidades.

4. Encuentra los ceros de las funciones dadas en el primer problema.

5. Realiza la gráfica de la función lineal f, definida por $f(x) = 4x - 2$. Halla todos los:

   (a) x, de manera que $f(x) = 0$.

   (b) x, de manera que $f(x) > 0$.

   (c) x, de manera que $f(x) < 0$.

Intersección de rectas. Sistemas de ecuaciones lineales

Actividad para la clase: Igualdad de costos

Tu clase necesita comprar camisetas para participar en el campeonato interno del colegio. Los almacenes “Fútbol y más” y “Sí se puede” ofrecen los siguientes presupuestos:

- “Fútbol y más”: 10 dólares por camiseta más 50 dólares, sin importar el tamaño del pedido.

- "Sí se puede": 12 dólares por camiseta más 40 dólares, sin importar el tamaño del pedido.

1. Determina una función lineal que dé el costo total F al ordenar n camisetas en la tienda "Fútbol y más".
2. Encuentra una función lineal que dé el costo total S al ordenar n camisetas en la tienda "Sí se puede".
3. Grafica en un mismo plano las dos funciones. Decide qué significa la abscisa x y la ordenada y para cada función.
4. ¿A qué tienda debería encargarse la fabricación de las camisetas si tu curso ordenara únicamente 4 camisetas?
5. ¿A qué tienda debería encargarse la fabricación de las camisetas si tu curso ordenara únicamente 10 camisetas?
6. Mira las gráficas que realizaste y contesta: ¿cuántas camisetas se deben ordenar para que el costo total de la orden sea el mismo en ambos almacenes?
7. ¿Hasta cuántas camisetas se podrían pedir al almacén "Sí se puede" de tal forma que la compra resulte mejor que en otro almacén?
8. ¿Cuál es el número mínimo de camisetas que deberán solicitarse al almacén "Fútbol y más" para que sea una mejor oferta?

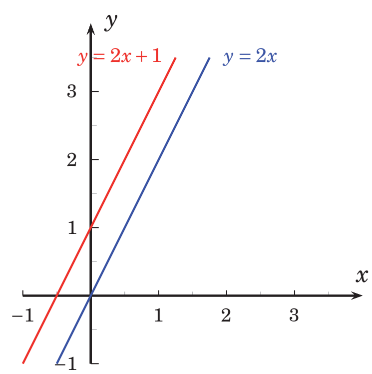
En esta actividad queremos encontrar un valor de n para el cual

$$F(n) = S(n).$$

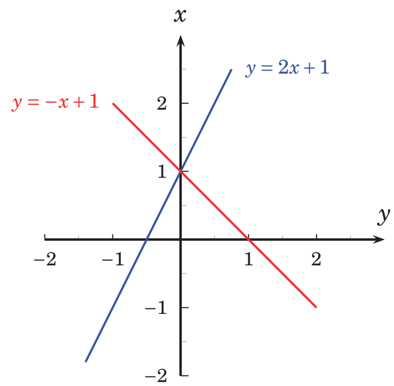
La gráfica de dos rectas, que son las gráficas de las funciones F y S, se cruzan o intersecan en un punto. Si trazas dos rectas cualesquiera, ¿estas siempre se intersecan?

Gráficamente, en general, tenemos las dos siguientes situaciones cuando dibujamos dos rectas:

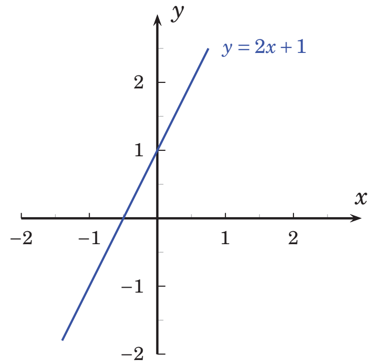
1. Las rectas son paralelas; es decir, no hay punto de intersección. Como ejemplo tenemos las rectas cuyas ecuaciones son $y = 2x$ y $y = 2x + 1$:



2. Las rectas no son paralelas y tienen un punto de intersección; por ejemplo: las rectas de ecuaciones $y = 2x + 1$ y $y = -x + 1$:



Hay una situación en la que se tiene una sola recta, aunque parece que se tratara de dos. Por ejemplo: las ecuaciones $y = 2x+1$ y $2y = 4x+2$ son, en realidad, la misma y, por lo tanto, representan la misma recta:



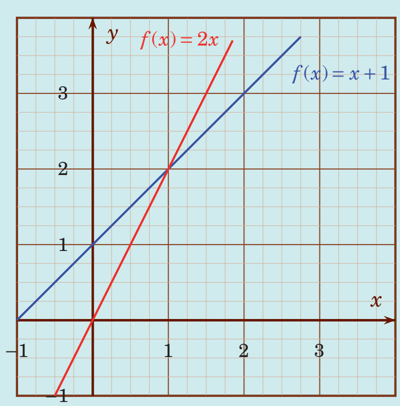
Algebraicamente, estas tres situaciones se pueden presentar cuando queremos encontrar un par de números (x, y) que simultáneamente satisfagan dos ecuaciones.

Ejemplo 21

Encuentra un par de números (x, y) que satisfaga simultáneamente las ecuaciones

$$y = x+1 \quad y \quad y = 2x.$$

Solución. En primer lugar, dibujamos cuidadosamente las gráficas de las dos ecuaciones, y buscamos el punto de intersección:



Como se puede ver, ambas rectas pasan por el punto de coordenadas $(1, 2)$; por lo tanto, el par de números $(1, 2)$ satisface ambas ecuaciones. Y esto lo podemos constatar fácilmente:

1. Para la ecuación $y = x+1$, tenemos que $2 = 1+1$; y

2. para la ecuación $y = 2x$, se verifica $2 = 2(1)$.

Ejemplo 22

Encuentra un par de números (x, y) *que satisfagan simultáneamente las ecuaciones*

$$x - y = -1 \quad y \quad 2x - y = 0.$$

Solución. Vamos a reescribir ambas ecuaciones. La primera, $x - y = -1$; si despejamos y, obtenemos

$$y = x + 1.$$

La segunda, $2x - y = 0$; también si despejamos y, nos da

$$y = 2x.$$

Por lo tanto, el par de números (x, y) que buscamos, deben satisfacer simultáneamente las ecuaciones

$$y = x + 1 \quad \text{y} \quad y = 2x.$$

Este problema es el que resolvimos en el ejemplo anterior. Y como ya lo sabes, los números del par $(1, 2)$ satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones.

En este último ejemplo, hemos reescrito las dos ecuaciones mediante el despeje de la incógnita y, puesto que es más fácil construir una tabla de valores para realizar la gráfica.

En general, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables (o incógnitas) se puede escribir de la manera siguiente:

$$\begin{cases} ax & + & by & = & e \\ cx & + & dy & = & f \end{cases}$$

Resolver este sistema de ecuaciones significa encontrar todos los pares de números (x, y) que satisfagan ambas ecuaciones simultáneamente.

Ejemplo 23

Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x & - & 2y & = & 2 \\ -\dfrac{x}{2} & + & \dfrac{y}{3} & = & 1. \end{cases}$$

Solución. En primer lugar, de manera similar a como procedimos en el ejemplo 22, lo que haremos es reescribir ambas ecuaciones mediante el despeje de y.

La primera, $3x - 2y = 2$, nos da

$$2y = 3x - 2,$$

de donde obtenemos la ecuación

$$y = \frac{3}{2}x - 1.$$

La segunda ecuación, $-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, se transforma en

$$\frac{y}{3} = \frac{x}{2} + 1,$$

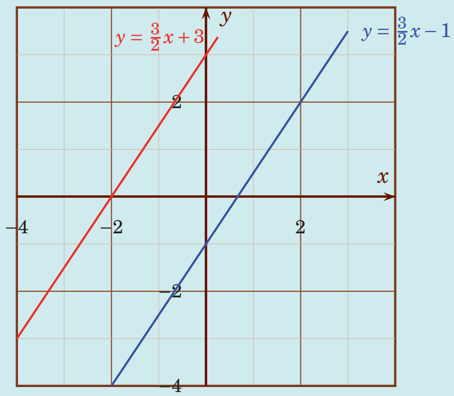
de donde obtenemos la ecuación

$$y = \frac{3}{2}x + 3.$$

Por lo tanto, buscamos el par de números (x, y) que satisfagan simultáneamente las ecuaciones

$$y = \frac{3}{2}x - 1 \quad \text{y} \quad y = \frac{3}{2}x + 3.$$

A continuación, dibujemos las rectas correspondientes a estas ecuaciones, y miremos en qué punto se cortan:



Como puedes observar, las rectas son paralelas y no se cortan. En conclusión, ningún par de números (x, y) satisface el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x & - & 2y & = & 2 \\ -\dfrac{x}{2} & + & \dfrac{y}{3} & = & 1. \end{cases}$$

En otras palabras, este sistema no tiene solución.

En este último ejemplo, pudiste haber llegado a la solución del sistema, sin necesidad de dibujar las rectas. En efecto, si observamos con atención los coeficientes de x en ambas ecuaciones, vemos que son iguales. Esto significa que las rectas correspondientes son paralelas. Y como los términos independientes en ambas ecuaciones son diferentes entre sí, quiere decir que las rectas son paralelas y diferentes, pues cada una corta en puntos diferentes del eje vertical.

Ejemplo 24

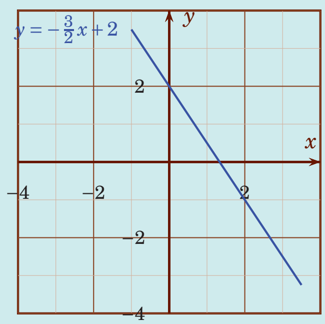
Resuelve la ecuación

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$$

Solución. Podemos ver a esta única ecuación como un sistema de dos ecuaciones iguales:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} & + & \dfrac{y}{3} & = & 1, \\ \dfrac{x}{2} & + & \dfrac{y}{3} & = & 1. \end{cases}$$

La gráfica de las rectas correspondientes —que, en realidad, es una sola recta— es la siguiente, cuya ecuación es $y = -\frac{3}{2}x + 2$ (luego de despejar y):



Entonces, todos los puntos de la recta nos proveen una solución del sistema; es decir, todo par de números (x,y) que satisfacen la ecuación

$$y=-\frac{3}{2}x+2$$

es una solución del sistema. Por ejemplo: el par $(0,2)$ es una solución, pues

$$-\frac{3}{2}(0)+2=0+2=2.$$

Otro par que es solución es $(-2,5)$, pues

$$-\frac{3}{2}(-2)+2=3+2=5.$$

En general, si das un valor a x en la ecuación, obtenemos el correspondiente y; ese par ordenado es una solución del sistema.

En los ejemplos anteriores, hemos aprendido ya un método para resolver el sistema de dos ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

A este método se lo denomina *método gráfico*. De estos ejemplo, sabemos que hay tres posibilidades:

1. **Posibilidad 1**: no hay solución; es decir, las rectas correspondientes a las ecuaciones son paralelas, por lo que no se intersecan.
2. **Posibilidad 2**: hay un par de números que satisfacen ambas ecuaciones; es decir, las rectas correspondientes no son paralelas y hay un punto de intersección.
3. **Posibilidad 3**: hay infinitos pares de números que satisfacen ambas ecuaciones simultáneamente; es decir, las dos ecuaciones corresponden a una misma recta.

Ejemplo 25

Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 7x + 2y = 3, \\ x + \frac{6}{7}y = 1. \end{cases}$$

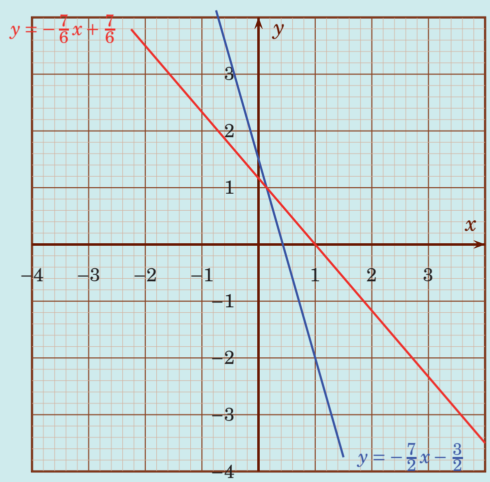
Solución. En primer lugar, despejamos y de cada ecuación para reescribirla. Obtienes así las siguientes ecuaciones:

$$y = -\frac{7}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad y = -\frac{7}{6}x + \frac{7}{6}.$$

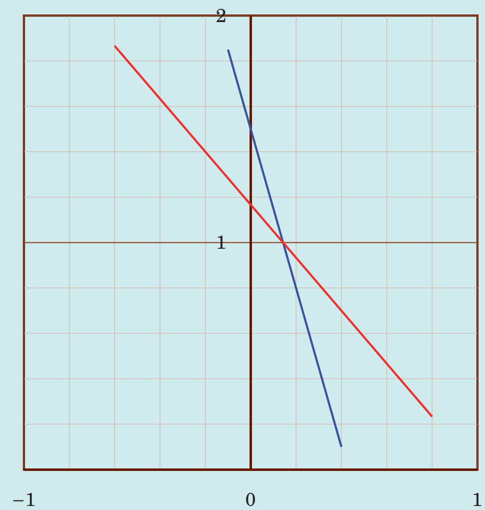
A continuación, dibujamos las rectas correspondientes a estas ecuaciones. Para ello, elaboramos las siguientes tablas:

x	$y = -\frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$	x	$y = -\frac{7}{6}x + \frac{7}{6}$
0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{7}{6}$
$\frac{3}{7}$	0	1	0

Entonces, la recta de ecuación $y = -\frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$ pasa por los puntos de coordenadas $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(\frac{3}{7}, 0\right)$; en cambio, la recta de ecuación $y = -\frac{7}{6}x + \frac{7}{6}$ pasa por los puntos de coordenadas $\left(0, \frac{7}{6}\right)$ y $(1, 0)$. Sus gráficas son las siguientes:



Como podemos ver, las rectas se intersecan en un punto. Sin embargo, es difícil saber exactamente cuáles son las coordenadas de este punto, a pesar de que la gráfica haya sido realizada cuidadosamente. Incluso, si hiciéramos un dibujo a una escala mayor, sería complicado saber cuáles son las coordenadas del punto en el que se intersecan ambas rectas:



Se puede apreciar que la ordenada es igual a 1; sin embargo, la abscisa está entre 0 y 0,2; más cerca de 0,2, pero nada más.

En resumen, en este caso el método gráfico nos permite conocer que sí hay una solución al sistema de ecuaciones, pero no nos permite saber con precisión cuál es esa solución.

El método gráfico tiene limitaciones en algunos casos, pero hay otras estrategias de solución que no requieren de gráficas. A continuación vamos a resolver un mismo sistema de ecuaciones lineales con tres estrategias distintas entre sí y diferentes del método gráfico. Lee cada una con detenimiento. Compara las estrategias de solución. Discute en la clase qué ventajas tiene cada una.

Ejemplo 26

Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x & + & y & = & 0 \\ -x & + & y & = & 1. \end{cases}$$

Solución 1. Buscamos una pareja de números (x, y) que satisfaga ambas ecuaciones. Para esta pareja es cierto que simultáneamente la incógnita y cumple dos condiciones:

$$\begin{cases} y & = -x, \\ y & = 1 + x. \end{cases}$$

Es decir:

$$y = -x = 1 + x.$$

Por tanto:

$$-x = 1 + x.$$

La ecuación que acabamos de obtener es una ecuación lineal con una sola incógnita:

$$-2x = 1,$$

de donde obtenemos que $x = -\frac{1}{2}$.

Ahora que hemos obtenido el valor de x, podemos utilizar cualquiera de las dos condiciones que satisface y para obtener el valor de y. Por ejemplo: en la primera reemplazamos

x por $-\frac{1}{2}$:

$$y = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Notemos que mediante la segunda condición, obtenemos el mismo valor:

$$y = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

En resumen, el par de números que son solución del sistema de ecuaciones es

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

A la estrategia de esta solución se la denomina *resolución por igualación*. ¿Por qué?

Ejemplo 27

Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + y = 1. \end{cases}$$

Solución 2. Para la pareja de números (x, y) que buscamos, la primera ecuación se reescribe de la manera siguiente:

$$y = -x;$$

es decir, la incógnita y es igual a $-x$.

Entonces, donde quiera que aparezca y en la segunda ecuación, tendrá el valor igual a $-x$. Por lo tanto, podemos sustituir y por $-x$ en la segunda ecuación:

$$-x + y = 1$$
$$-x + (-x) = 1,$$

con lo que obtenemos una ecuación con una sola variable:

$$-2x = 1,$$

de donde $x = -\frac{1}{2}$.

Y a partir de este momento, podemos proceder de manera similar a como se hizo en la primera solución para obtener que

$$y = \frac{1}{2}.$$

Entonces, el par de números que son solución del sistema de ecuaciones es

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

La estrategia utilizada en esta segunda solución es denominada *resolución por sustitución*. Explica este nombre.

Ejemplo 28

Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + y = 1. \end{cases}$$

Solución 3. Puesto que buscamos una pareja de números (x, y) que satisfaga ambas ecuaciones simultáneamente, los valores de las incógnitas x y y, respectivamente, son los mismos en ambas ecuaciones. Por lo tanto, podemos sumar las partes izquierdas de ambas ecuaciones entre sí y las partes derechas de ambas ecuaciones entre sí, y la igualdad se mantendrá, pero obtendremos una tercera ecuación:

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ -x & + & y & = & 1 \\ \hline 0 & + & 2y & = & 1; \end{array}$$

es decir, obtenemos la ecuación:

$$2y = -1.$$

Esta ecuación puede sustituir a cualesquiera de las dos ecuaciones del sistema, por ejemplo, a la segunda, de manera que obtenemos un nuevo sistema, pero equivalente al primero (es decir, el nuevo sistema tiene la misma solución que el original):

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ \phantom{x + {}} 2y = 1. \end{cases}$$

Como puedes ver, la segunda ecuación solo tiene la incógnita y, por lo que es fácil de resolver:

$$y = \frac{1}{2}.$$

Con ayuda de la primera ecuación, puedes obtener el valor de x:

$$x + y = x + \frac{1}{2} = 0,$$

de donde $x = -\frac{1}{2}$.

Entonces, el par de números que son solución del sistema de ecuaciones es

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

A esta estrategia se le llama *resolución por eliminación*.

Métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

- Gráfico.
- Igualación.
- Sustitución.
- Eliminación.

Ejemplo 29

Resuelve el sistema dado por eliminación y por sustitución:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 3y = 1. \end{cases}$$

Solución.

1. **Por eliminación**: En este caso, no podemos sumar directamente ambas ecuaciones para "eliminar" x; antes, debemos multiplicar por 2 la segunda ecuación. Entonces, obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x + 6y = 2. \end{cases}$$

Ahora tenemos la ventaja de que, al sumar ambas ecuaciones, podemos eliminar la incógnita x:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 0 \\ -2x & + & 6y & = & 2 \\ \hline 0 & + & 5y & = & 2; \end{array}$$

obtenemos, entonces, el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ \phantom{2x - {}} 5y = 2. \end{cases}$$

La segunda ecuación contiene únicamente la incógnita y, y su valor es fácil hallar:

$$y = \frac{2}{5}.$$

Si reemplazamos este valor de y en la primera ecuación, obtenemos:

$$2x - y = 2x - \frac{2}{5} = 0,$$

de donde $x = \frac{1}{5}$.

Por lo tanto, la pareja $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ es la solución al sistema.

Para verificar, sustituimos, en ambas ecuaciones, los valores encontrados:

$$\begin{cases} 2\left(\frac{1}{5}\right) & - & \frac{2}{5} & = & \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0, \\ -\frac{1}{5} & + & 3\frac{2}{5} & = & \frac{-1+6}{5} = \frac{5}{5} = 1. \end{cases}$$

2. **Por sustitución**: De la primera ecuación, podemos despejar y; obtenemos que $y = 2x$. Ahora sustituimos y por $2x$ en la segunda ecuación y obtenemos que

$$-x + 3(2x) = 1,$$

de donde:

$$5x = 1 \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{5}.$$

Ahora, de regreso a la primera ecuación, en ella sustituimos x por el valor encontrado y obtenemos:

$$y = 2\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}.$$

E, igual que antes, podemos concluir que la solución del sistema es el par de números $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

¡A practicar!

Ahora es tu turno.

1. Resuelve los siguientes sistemas. Utiliza el método de eliminación y otro de tu preferencia, según convenga.

   (a) $\begin{cases} -x & + & 2y & = & 2 \\ 3x & + & 3y & = & 1. \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} -2x & - & y & = & 5 \\ 3x & + & 3y & = & -1. \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 2x & + & 5y & = & 0 \\ 3x & - & 4y & = & -2. \end{cases}$

2. Sin resolver el sistema directamente, determina si tiene una solución, si no tiene solución o si tiene un número infinito de soluciones. Para ello, encuentra la pendiente y el corte de las rectas correspondientes a las ecuaciones dadas:

   (a) $\begin{cases} 2x & + & 8y & = & 2 \\ x & + & 4y & = & 1. \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 2x & + & 8y & = & 2 \\ x & - & 4y & = & -1. \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 2x & + & 8y & = & 2 \\ x & + & 4y & = & -1. \end{cases}$

Modelos lineales

La *antropometría* es una ciencia que investiga las relaciones que existen entre las dimensiones del cuerpo humano: peso, altura, longitud de brazos, etcétera. La antropometría es utilizada en medicina para supervisar el crecimiento de los infantes; en diseño industrial, para diseñar objetos de uso diario (computadoras, sillas, libros, etcétera). Discute con tus compañeros y con tu familia cómo se emplea la antropometría en la arquitectura, la industria automotriz y otros campos.

Actividad para la clase

En el libro *Los viajes de Gulliver*, escrito por el inglés Jonathan Swift en 1726, se menciona una regla que utilizaban los antiguos sastres y costureras: una vez alrededor de la muñeca, dos veces alrededor del pulgar. Vamos a encontrar una función que modele esta observación siguiendo cinco pasos:

Paso 1: recoger datos.

Paso 2: organizar los datos en una tabla o gráfico.

Paso 3: encontrar una función lineal que aproxime los datos.

Paso 4: utilizar el modelo para pronosticar valores y verificar su validez.

Paso 5: reflexionar sobre el proceso de modelización mediante la comparación con otros modelos.

Paso 1: recoger datos

Para este paso, necesitas tener un trozo de cuerda de 15 cm aproximadamente (si no tienes una, puedes usar el cordón de tu zapato) y una regla con milímetros.

En tu grupo (de cuatro o cinco personas), cada uno debe utilizar la cuerda para medir su pulgar y la muñeca de su mano. Marca con un lápiz la cuerda para luego encontrar la medida utilizando la regla.

Paso 2: organizar los datos

1. Organiza la información en la siguiente tabla:

Pulgar (en cm)					
Muñeca (en cm)					

2. Ubica las parejas de la tabla en un un plano cartesiano, en el que la variable x sea la medida del pulgar y la variable y, la de la muñeca.
3. Discute en tu grupo cómo realizar el gráfico. ¿De qué tamaño debe ser cada unidad en el eje x, en el eje y?
4. Estos datos, ¿siguen algún patrón?
5. Con una regla, traza una recta que "visualmente" te parezca que pasa más cerca de todos los puntos del gráfico.

Paso 3: función lineal que aproxima los datos

1. Utiliza dos puntos sobre la recta que trazaste en el paso anterior y encuentra su ecuación.
2. La ecuación tiene la forma $y = ax + b$. Interpreta los parámetros a y b.

Paso 4: utiliza el modelo para pronosticar

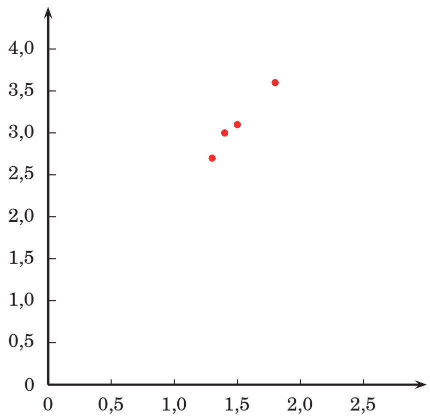
1. Utiliza la ecuación encontrada para pronosticar cuál sería el tamaño del puño de una camisa de una persona que tiene un pulgar de 6 cm.

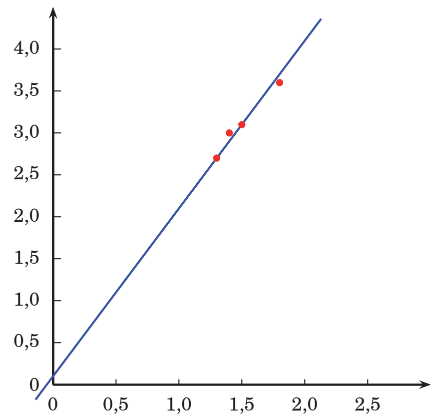
2. Si la muñeca midiera 13 cm, según tu modelo, ¿cuál sería la medida de su pulgar?

Paso 5: compara con otro modelo

Compara tu modelo con el siguiente. Un grupo, en la clase del profesor Ortega, obtuvo los siguientes resultados:

Pulgar (en cm)	1,5	1,4	1,3	1,8
Muñeca (en cm)	3,1	3,0	2,7	3,6





Esta recta pasa por los dos puntos de la tabla (1,3;2,7) y (1,5;3,1). Su pendiente es

$$a = \frac{3{,}1 - 2{,}7}{1{,}5 - 1{,}3} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es

$$y - 2{,}7 = 2(x - 1{,}3),$$

que, luego de simplificar, da $y = 2x + 0{,}1$.

La interpretación de la pendiente es la siguiente: la muñeca cambia en 2 cm por cada centímetro que cambia el pulgar.

Interpretación del corte de la recta con el eje y: si el pulgar midiera 0 cm, la muñeca debería medir 0,1 cm.

1. Discute las conclusiones a las que llegó este grupo.

2. ¿Qué puedes afirmar de la última aseveración sobre la interpretación del corte?

3. ¿A qué conclusiones has llegado luego de comparar tu modelo y el de los estudiantes del profesor Ortega?

Ejercicios

Conceptos

1. Con tus propias palabras, explica el concepto de pendiente.

2. Responde a las siguientes preguntas y justifica tu respuesta con frases completas:

(a) Si una recta de ecuación $y = f(x)$ tiene pendiente positiva, ¿es la función f creciente?

(b) Si una recta de ecuación $y = f(x)$ tiene pendiente negativa, ¿la función f es creciente?

3. Roberto desea realizar la gráfica de la recta cuya ecuación es $2x - 3y = 1$. Para ello, realiza la siguiente tabla:

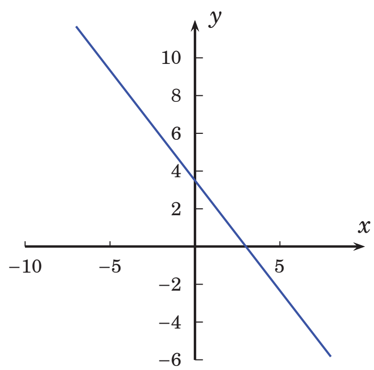
x	0	1	1/2
y	−1/3	−2/3	0

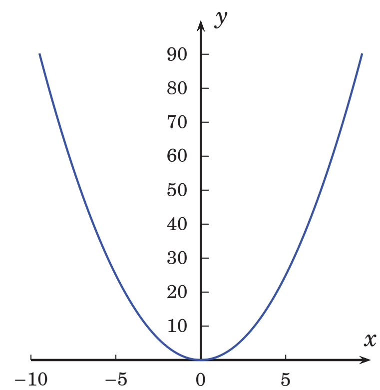
Decide si Roberto está en lo correcto.

4. Mediante una frase completa, explica cómo verificarías que el punto de coordenadas $(1,4)$ pertenece a una recta de ecuación $y = ax + b$.

5. La función f es una función lineal. Explica en una frase completa qué procedimiento utilizarías para realizar su gráfica.

6. En cada caso, explica con frases completas si la gráfica o la tabla dada representa una función lineal:





(a)

(b)

x	2	3	4	5
y	7	10	13	16

(c)

x	2	3	4	5
y	5	9	13	16

7. La tasa de cambio de una función lineal es 3. Si la variable x aumenta en 6 unidades, ¿cuál es el cambio de la función (aumenta o disminuye)?

8. La tasa de cambio de una función lineal es −3. Si la variable x aumenta en 2 unidades, ¿cuál es el cambio de la función (aumenta o disminuye)?

9. Explica con frases completas por qué la intersección de la recta de ecuación

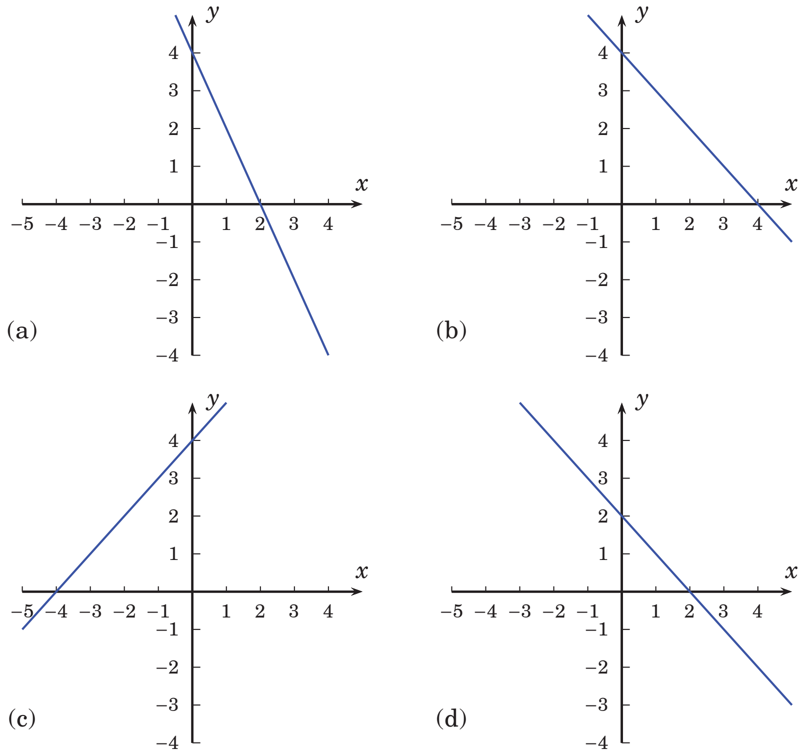
$$y = ax + b$$

y el eje horizontal es el mismo punto de intersección entre las rectas de ecuaciones

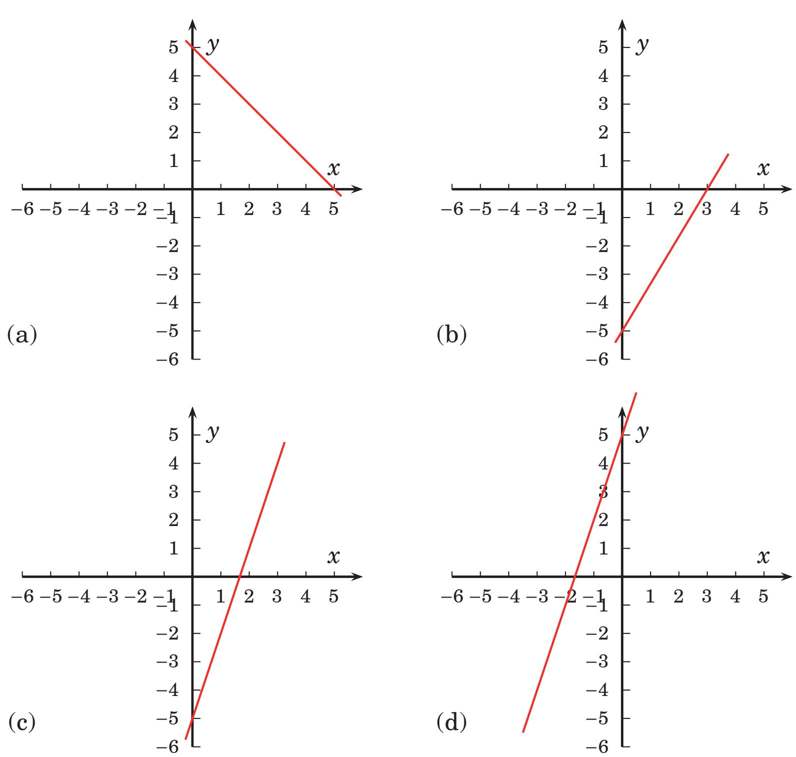
$$y = ax + b \quad \text{y} \quad y = 0.$$

10. Si f es una función lineal tal que $f(0) = 1$ y $f(2) = 2$, ¿cuáles son los cortes de la gráfica de la función f con los ejes?

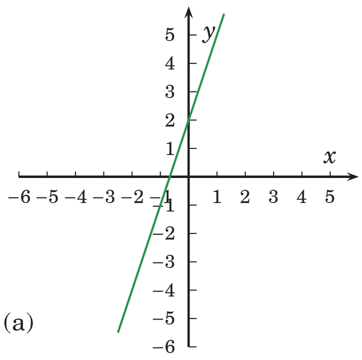
11. Identifica la gráfica de la función f definida por $f(x) = -x+4$. Con frases completas justifica tu elección. ¿Es la función creciente o decreciente?

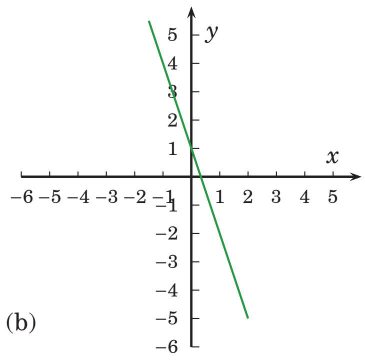


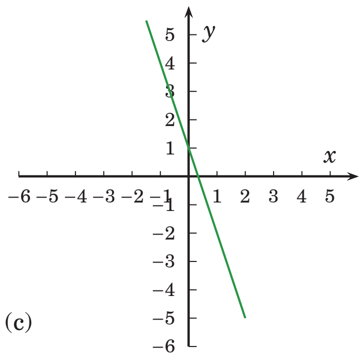
12. Reconoce la gráfica de la función f definida por $f(x) = 3x-5$. Mediante frases completas justifica tu elección. ¿Es la función creciente o decreciente?

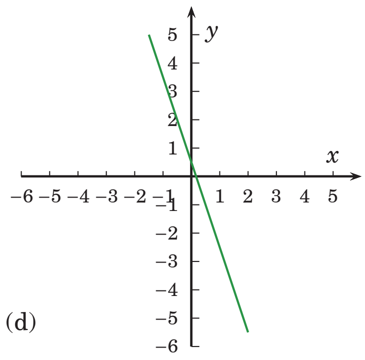


13. Identifica la gráfica de la función f definida por $f(x) = -3x+1$. Con frases completas, justifica tu elección. ¿Es la función creciente o decreciente?


(a)


(b)


(c)


(d)

14. Proporciona un ejemplo de una función creciente.

15. Da un ejemplo de una función decreciente.

16. Propón un ejemplo de una función constante.

Procedimientos

1. Para cada uno de los siguientes literales en este ejercicio:

   i. Encuentra la pendiente.

   ii. Identifica si la pendiente es positiva, negativa, cero o no está definida.

   iii. Indica los cortes de la recta con los ejes.

   iv. Indica si y crece o decrece cuando x crece, con $y = ax + b$. ¿En qué relación está tu respuesta con la pendiente que determinaste?

   v. Indica si y crece o decrece cuando x decrece, con $y = ax + b$. ¿En qué relación está tu respuesta con la pendiente que determinaste?

   (a) La recta pasa por los puntos de coordenadas $(1, 2)$ y $(3, 4)$.

   (b) La recta pasa por los puntos de coordenadas $(1, 0)$ y $(3, -2)$.

   (c) La recta pasa por los puntos de coordenadas $(1, 3)$ y $(2, 3)$.

   (d) La recta pasa por los puntos de coordenadas $(1, 2)$ y $(-3, 5)$.

   (e) La recta pasa por los puntos de coordenadas $(1, 2)$ y $(1, 3)$.

2. Encuentra la ecuación de una recta que satisfaga las condiciones siguientes:

   (a) La recta tiene pendiente 4 y pasa por el punto $(0, 3)$.

   (b) La recta tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y pasa por el punto $(0, 5)$.

   (c) La recta es horizontal y pasa por el punto $(5, 0)$.

(d) La recta tiene pendiente 2 y pasa por el punto $(4,12)$.

(e) La recta pasa por los puntos $(-5,4)$ y $(3,1)$.

(f) La recta es vertical y pasa por el punto $(1,2)$.

(g) La recta es paralela a la recta de ecuación $y = 4x - 9$ y pasa por el punto de coordenadas $(2,3)$.

(h) La recta es paralela a la recta de ecuación $y = -3x + 1$ y pasa por el origen.

(i) La recta es perpendicular a una recta de ecuación $y = 5x + 1$ y pasa por el origen.

3. En cada caso, determina una función lineal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$.

   (a) Se sabe que $f(0) = 1$ y $f(2) = 3$.

   (b) Se sabe que $f(0) = -2$ y la función es constante.

   (c) Se sabe que $f(0) = 1$ y que si x cambia en tres unidades, el valor de $f(x)$ cambia en 6 unidades.

4. Encuentra la intersección de las rectas dadas por las ecuaciones siguientes:

   (a) $y = -x + 2$ y $y = 4x + 5$.

5. Halla el cero de la función lineal f definida por $f(x) = 3x + 7$.

6. Encuentra el cero de la función lineal f definida por $f(x) = -2x + 5$.

7. En cada caso, determina la tasa de cambio de la función lineal f y determina si la función es creciente o decreciente.

   (a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$.

   (b) $f(x) = 4x - 5$.

   (c) $f(x) = -\frac{1}{2} + 3$.

   (d) $f(x) = -0{,}4x + 8$.

8. Halla el cero de cada función lineal f definida por:

   (a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 4$.

   (b) $f(x) = -4x - 1$.

   (c) $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$.

   (d) $f(x) = -0{,}5x + 0{,}6$.

9. Grafica las funciones lineales f y g definidas por $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = -x + 5$. Luego, completa las siguientes oraciones:

   - El valor x para el cual $f(x) = g(x)$ es: ...
   - El intervalo de los números reales x tales que $f(x) > g(x)$ es: ...
   - El intervalo de los números reales x tales que $f(x) < g(x)$ es: ...

10. Resuelve el sistema dado. Indica, en cada caso, si el sistema tiene una, ninguna o infinitas soluciones.

   (a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 2y = 1. \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 1. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2u + v = 16 \\ u + v = 11. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 4p + 2q = 9 \\ 5p - 4q = 5. \end{cases}$

Aplicaciones y modelización

1. Los estudiantes de segundo año de Bachillerato de un colegio de la Sierra están planeando un paseo de fin de año a la Costa. El costo será de 120 dólares (para todo el curso) para cada día de estadía en un hotel. El costo del viaje de ida y vuelta para todos es de 250 dólares.

   (a) Encuentra un modelo mediante una función lineal que represente el costo C en términos del número de días n que se queden en la Costa. Decide un dominio adecuado para la función.

   (b) Traza el gráfico de la función costo encontrado.

   (c) Interpreta la pendiente de la recta correspondiente. Toma en cuenta las unidades de C y n.

   (d) Interpreta los cortes de la recta con los ejes. (Toma en cuenta el dominio de la función).

   (e) Una compañía de turismo les ofrece un paquete completo de cuatro días por 1 000 dólares. ¿Es mejor esta oferta o les conviene organizar el paseo por su cuenta?

   (f) La clase quiere recolectar fondos para realizar su paseo, por lo que va a organizar una fiesta en el colegio. Dispondrán del local gratuitamente. ¿Cuántas entradas de 5 dólares deberán vender para recolectar dinero suficiente para el paseo?

   (g) El curso tiene la posibilidad de contratar un bus con amenidades; el costo es de 300 dólares. Reformula el modelo original para incluir este nuevo gasto. Grafica la nueva función de costo y compárala con la gráfica de la función de costo de la situación original. Describe la relación entre las dos gráficas.

2. María y Sandra quieren ahorrar para comprar una computadora. María puede ahorrar 2 dólares cada semana si no compra nada en el bar del colegio. Su mamá le ha ofrecido una ayuda de 150 dólares. Sandra puede ahorrar un dólar cada semana, si va caminando al colegio en lugar de tomar el bus. Ella ya tiene ahorrados 160 dólares.

   (a) Elabora dos modelos mediante funciones lineales para el ahorro M de María y el ahorro S de Sandra, en términos del número de semanas x, respectivamente. Selecciona un dominio adecuado para cada función.

   (b) En un mismo sistema de coordenadas, traza el gráfico de cada función.

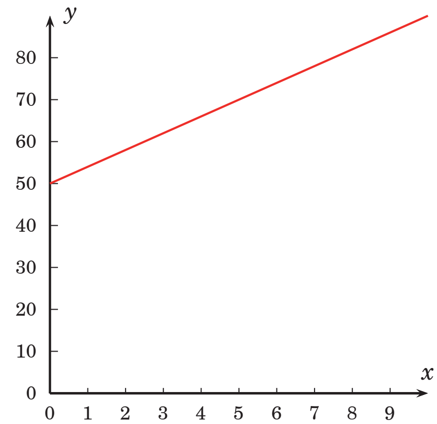
   (c) Interpreta la pendiente de cada recta (toma en cuenta las unidades de M, S y x).

   (d) Interpreta los cortes de cada una de las rectas con los ejes. (Toma en cuenta el dominio de las funciones).

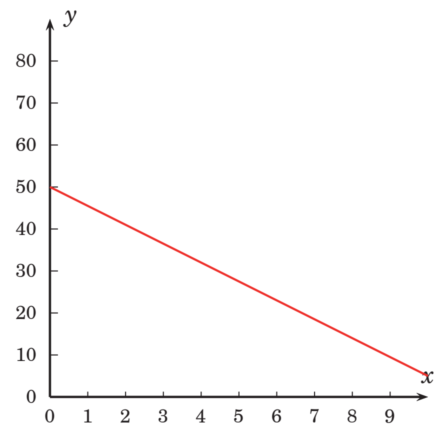
   (e) ¿Quién tiene más dinero ahorrado después de dos semanas? ¿De cinco? ¿Después de veinte semanas?

   (f) ¿En cuántas semanas el total del dinero ahorrado por María es mayor al total del dinero ahorrado por Sandra?

3. Escribe una historia cuyo modelo gráfico sea el siguiente:



4. Escribe una historia cuyo modelo tenga el siguiente gráfico:



5. El Ecuador ha realizado dos censos de población a nivel nacional en dos ocasiones en los últimos 20 años. El Instituto Ecuatoriano de Estadísticas INEC (http://www.inec.gov.ec/home/) recoge los resultados de estos censos.

   (a) Encuentra los datos de los dos últimos censos nacionales de población.

   (b) Halla un modelo lineal $P(t) = at + b$ para la población P del país en términos del número de años a partir de 1990.

   (c) Utiliza el modelo para pronosticar la población del Ecuador en el año 2020.

   (d) En un párrafo, reflexiona por qué es útil tener un modelo poblacional.

6. Utiliza los datos dados en la introducción de este capítulo sobre el uso del celular, para crear un modelo lineal que represente el porcentaje de hombres que usan celular como una función del tiempo.

7. Emplea los datos dados en la introducción de este capítulo sobre el uso del celular, para crear un modelo lineal que represente el porcentaje de mujeres que usan celular como una función del tiempo.

8. Usando los resultados de los dos ejercicios anteriores, responde la pregunta de la introducción: ¿es cierto que en 2010 hubo un mayor incremento en el porcentaje de mujeres que de hombres en el uso del celular?

9. En el informe del INEC, mencionado en la introducción, están publicadas las cifras de uso de Internet para hombres y mujeres por tres años consecutivos (2008, 2009, 2010) en porcentaje de la población:

Año	Hombres	Mujeres
2008	26,6 %	24,9 %
2009	25,4 %	23,9 %
2010	29,9 %	28,2 %

(a) En un mismo sistema de coordenadas, dibuja los puntos dados; asegúrate de usar dos colores diferentes para que puedas distinguir entre los datos correspondientes a mujeres y hombres.

(b) Sobre la base de lo hecho en el literal anterior, traza rectas que se aproximen a los puntos dados para cada uno de los casos.

(c) Encuentra las ecuaciones de las rectas que trazaste en la parte anterior.

(d) Escribe el modelo lineal para cada caso. Asumiendo que sigue la misma tendencia, pronostica aproximadamente en cuántos años toda la población utilizaría Internet. ¿Es esto realista?

(e) Escribe un párrafo narrando en frases completas los resultados que encontraste en este ejercicio. Si fueras un periodista, ¿qué escribirías como titular de tu nota de prensa?

Pensamiento crítico

1. Elabora la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x-5|$.

2. Determina la intersección de las gráficas de las funciones f y g definidas por $f(x) = |x-2|$ y $g(x) = |x-4|$.

3. Sean a y b dos números reales y f una función lineal definida por $f(x) = ax+b$. Para cada valor diferente de a y de b se obtiene una función lineal particular. Considerando todos los posibles valores de los coeficientes a y b, a los que se los denomina parámetros, se dice que se tiene una familia de funciones lineales.

   Por ejemplo: la igualdad $f(x) = 2x+b$ representa una familia de funciones lineales cuando el parámetro b cambia; en este caso, se dice que este parámetro es *libre*. En cambio, la igualdad $g(x) = ax-3$ representa una familia en la que el parámetro libre es a.

   (a) Considera la familia de funciones $f(x) = 3x+b$, en la que el parámetro b es libre. Explica cómo se relacionan las gráficas de esta familia entre sí. Grafica algunas funciones que pertenecen a esta familia.

   (b) Considera la familia de funciones $f(x) = ax+5$, en la que el parámetro a es libre. Explica cómo se relacionan las gráficas de esta familia entre sí. Grafica algunas funciones que pertenecen a esta familia.

4. Decide si las condiciones siguientes podrían ser satisfechas por una función lineal. Para cada caso, escribe una frase completa con el detalle del razonamiento realizado.

   (a) La tasa de cambio de la función es positiva y la gráfica de la función no corta el eje horizontal.

   (b) Es constante y no corta el eje horizontal.

   (c) Es constante y no corta el eje vertical.

5. Encuentra el intervalo de números reales x tales que satisfacen la desigualdad

$$2x-3<x+8.$$

Sugerencia: Grafica dos funciones lineales f y g.

6. En cada caso, completa el sistema con una segunda ecuación, de manera que se cumpla la condición requerida:

$$\begin{cases} 3x \quad + \quad y \quad = \quad 5 \\ \end{cases}$$

   (a) El sistema tiene una única solución.

   (b) El sistema no tiene solución.

   (c) El sistema tiene infinitas soluciones.

7. Halla el valor de x para el cual la funciones f, definida por $f(x)=-2x+5$ es igual a la función g, definida por $g(x)=3x-1$.

8. Decide si las siguientes funciones son iguales. Justifica tu respuesta.

$$f(x)=x+4 \quad \text{y} \quad g(x)=\frac{x^2-16}{x-4}.$$

9. **Ángulos entre rectas**. Completa.

   (a) El ángulo entre las rectas de ecuaciones $y=0$ y $y=x$ es ...

   (b) El ángulo entre las rectas perpendiculares es ...

   (c) El ángulo entre las rectas de ecuaciones $y=0$ y $x=0$ es ...

10. **Demuestra**:

   (a) Las rectas de ecuaciones $y=2x+1$ y $y=-1/2x+3$ son perpendiculares. (Sugerencia: determina un triángulo de manera que dos de sus vértices estén sobre la primera recta, y el tercer vértice esté en la segunda recta. Demuestra que se cumple la relación pitagórica entre los lados del triángulo).

   (b) Las rectas de ecuación $y=a_1x$ y $y=a_2x$ son perpendiculares si $a_2=-1/a_1$. Puedes utilizar la sugerencia del ejercicio anterior.

   (c) Las rectas $y=a_1x+b$ y $y=a_2x+c$ son perpendiculares si $a_2=-1/a_1$. Puedes usar lo demostrado en el ejercicio anterior.

Uso de tecnología

1. Utiliza una calculadora gráfica para realizar gráficas de las siguientes ecuaciones o funciones dadas. En cada caso, determina si la ecuación o la función es lineal. Específica el dominio adecuado para graficar la función, de manera que sus características geométricas sean claramente apreciables.

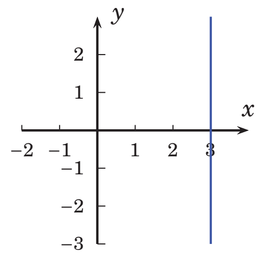
   (a) $y=0{,}5x+4{,}3$.

   (b) $y=200x$.

   (c) $2x-0{,}008y=4$.

   (d) $y=x^2$.

2. Fausto utiliza una calculadora para realizar la gráfica de la función f, definida por $f(x) = 100(x-3)+2$ y su calculadora le muestra lo siguiente:



Fausto concluye que la recta es vertical. Decide si Fausto está en lo correcto. Si no lo está, escribe en una frase completa una explicación que le ayude a Fausto a corregir su error.

3. Emplea una calculadora gráfica o una aplicación en el Internet para determinar si las dos ecuaciones son equivalentes.

   (a) $y = (5x+5)/5,\ y = x$.

   (b) $y = (5x+1)/5,\ y = x$.

4. En una calculadora gráfica o mediante una aplicación en Internet, realiza la gráfica de $y = x^2 + 1$.

   (a) Utiliza una ventana con rango en x entre -3 y 3. Explica por qué esta gráfica no corresponde a una función lineal.

   (b) Usa una ventana con rango en x entre 0 y 0,5, el rango en y entre 1 y 1,2. ¿Cómo se altera la apariencia de la gráfica comparada con la anterior gráfica?

5. Con una calculadora gráfica o con una aplicación de computadora, resuelve los sistemas siguientes mediante el método gráfico:

   (a) $\begin{cases} 3x + 8y = 2 \\ 7x - 6y = -3. \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 0{,}2x + y = 0{,}5 \\ -x + 0{,}4y = 1. \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 0{,}75x + 0{,}04y = 0{,}05 \\ -0{,}1x + 0{,}7y = 0{,}2. \end{cases}$