Capítulo 1

Funciones

Vivimos en un mundo lleno de fenómenos que revelan su naturaleza matemática, y en los que encontramos cantidades que se relacionan entre sí. Por ejemplo: en la biología, la cantidad de bacterias que crecen en un cultivo depende de la cantidad de alimento que haya en el medio en el que se encuentra el cultivo; en la economía, la demanda y el precio están relacionados; en la geometría, el área de un círculo depende del radio de este. En nuestra vida cotidiana, podemos observar situaciones sencillas:

1. la altura de una persona depende de su edad;
2. mi peso cambia de acuerdo al número de calorías que consumo; y,
3. en un paseo de la Sierra a la Costa, notamos que la temperatura del aire cambia conforme disminuye la altura a la cual nos encontramos respecto del nivel del mar.

Preparación y repaso

1. Ubicación de parejas ordenadas en el plano.

   (a) Grafica en un plano de coordenadas los puntos que corresponden a las siguientes parejas ordenadas: $(0,2)$, $(-1,3)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, $(-1,0)$.

   (b) Determina en qué cuadrante están los puntos que corresponden a las parejas: $(\pi,-\pi)$, $(3\sqrt{2},-\sqrt{3})$, $(a^2,3a^2)$.

2. Evaluación de expresiones aritméticas con números reales.

   (a) Evalúa $3^2-4\ \ 3^3+1$.

   (b) Evalúa $\left(\dfrac{64}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$.

   (c) Evalúa $(0{,}4)^2\times 5^2$.

3. Operaciones con expresiones algebraicas.

   (a) Simplifica:

      i. $x^2+x-2x^2-(x+4)$.
      ii. $3t-2(6+2t)$.
      iii. $\dfrac{1}{y}\left(4y^2-\dfrac{y}{2}\right)$.

   (b) Determina si es verdadera o falsa cada una de las igualdades siguientes:

      i. $(a+b)^2=a^2+b^2$.
      ii. $\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

4. Operaciones con polinomios.

   (a) Simplifica:

      i. $(3x-1)(2x+4)$.
      ii. $\dfrac{4x^2-x}{x}$.
      iii. $\sqrt{x^2-4x+4}$.
      iv. $\dfrac{x^2-7x+10}{x-5}$.

5. Resolución de ecuaciones lineales.

   (a) Encuentra el valor de x para que cada una de las siguientes igualdades sea verdadera.

      i. $3x+6=4$.
      ii. $\dfrac{1}{2}+1=-x$.
      iii. $\dfrac{5}{2}a+\dfrac{3}{4}=2a+\dfrac{1}{5}$.

6. Representación de subconjuntos de números reales mediante intervalos.

   (a) Expresa el siguiente conjunto con la notación de intervalos: $\{x\in\mathbb{R}:-1<x<3\}$.

   (b) Expresa el siguiente conjunto con la notación de intervalos: $\{x\in\mathbb{R}:x\geq\sqrt{2}\}$.

Investigación

¿Intentaste doblar un papel muchas veces alguna vez? ¿Cuántas veces lo puedes doblar sucesivamente en mitades? Algunos libros de "curiosidades matemáticas" mencionan el hecho de que un papel solo puede ser doblado siete veces en secuencia, sin importar qué tan grande sea éste. ¿Es esto cierto? ¡Investígalo! Escoge varios tamaños de papel y dobla sietes veces en la mitad cada uno sucesivamente. ¿Llegaste a alguna conclusión? Esta investigación te ayudará a encontrar la respuesta y una posible explicación.

1. ¿Cuántas hojas se producen con cada doblez?
2. Organiza la información en una tabla como la siguiente:

número de dobleces	número de hojas
0	1
1	2
2	4
3	
4	

3. ¿Puedes encontrar una relación entre el número de dobleces y el número de hojas obtenidas? ¿Observas algún patrón entre esas dos cantidades? Si nombras con la letra n el número de dobleces y con h el número de hojas, ¿puedes escribir una fórmula o una ecuación que relacione n con h? ¿Son importantes en sí mismas las letras que utilizamos para representar a cada cantidad?
4. Si haces 10 dobleces, ¿cuántas hojas obtienes? ¿Cuántos dobleces se necesitan para tener 256 hojas?
5. Grafica las parejas ordenadas de la tabla en un plano cartesiano, y trata de dibujar una línea curva que pase por todos los puntos. ¿Cómo se ve el dibujo obtenido?
6. ¿Es importante el tamaño de la hoja inicial?
7. Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

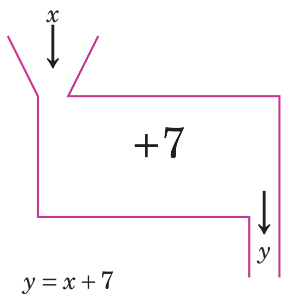
Regresa a la pregunta original: trata de encontrar razones por las cuales la respuesta puede ser afirmativa.

1. ¿Qué pasa si doblas el papel en tres, en lugar de doblarlo en dos?
   (a) Encuentra una ecuación que relacione el número de hojas h después de n dobleces.
   (b) Determina el número de hojas que salen cuando se hacen 5 dobleces.
   (c) Calcula cuántos dobleces hacen falta para tener 81 hojas.
2. Encuentra una ecuación que relacione el número de hojas que se pueden obtener cuando doblas el papel en a partes después de n dobleces.

Noción de función

En la investigación de esta unidad, encontraste una ecuación que relaciona dos cantidades: el *número de dobleces* y el *número de hojas obtenidas*. Descubriste también que si la segunda cantidad *cambia* o *varía*, la otra también lo hace. Cuando esto ocurre, en Matemática decimos que el número de hojas es una *función* del número de dobleces. A ambas cantidades que varían se las denomina *variables*. Sin embargo, como la variable *número de hojas obtenidas* cambia cuando cambia la variable *número de dobleces*, a la primera se la denomina *variable dependiente* y a la segunda, *independiente*.

En esta sección comprenderemos la noción de función de varias maneras.



1. Una función puede ser entendida como una *máquina* a la cual se la alimenta con un objeto x, y la máquina produce un *solo* resultado y.

   Por ejemplo: una máquina que duplica la cantidad de objetos que se le den. Esta máquina puede representarse por medio de la fórmula $y = 2x$. Otro ejemplo: una máquina que añade 7:

   (a) Si el valor de entrada fuera 4, entonces el valor de salida será 11.

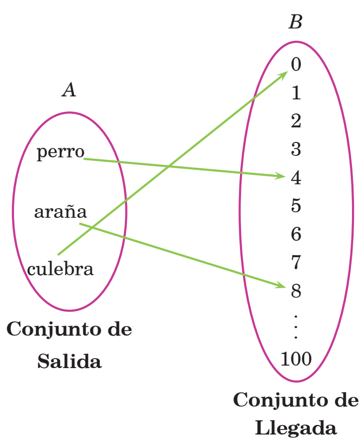
   (b) Si el valor de entrada fuera -1, el valor de salida será 6.

   (c) Si el valor de entrada fuera u, el valor de salida será $u + 7$.

   (d) ¿Cuál será el valor de salida si el de entrada es -7?

   (e) ¿Cuál será el valor de entrada si el de salida es 3?

Para cada valor de entrada, hay un solo valor de salida. En lenguaje matemático, decimos que y es la *imagen* de x.



2. Una función puede ser comprendida como una *regla de asignación*: a cada elemento de un conjunto se le asigna un *único* elemento de otro conjunto. Por ejemplo: a un animal se le asigna el número de sus patas. Una regla de asignación se puede representar mediante flechas.

   (a) ¿Conoces algún animal al que le corresponda el número 6? ¿El 5?

   (b) Hay algunos números del conjunto de los números de patas que no le corresponden a ningún animal.

   (c) Hay algunos elementos del conjunto de números de patas (como el 4) que corresponden a varios animales.

   Al conjunto de animales suele llamársele *conjunto de salida*; al conjunto de los números de patas, *conjunto de llegada*.

   ¿Es posible que para algún animal la regla le asigne más de un número? ¡No! Por ello, esta *relación* es una *función*. Para una función, cada elemento del conjunto de salida está en relación con un solo elemento del conjunto de llegada.

3. En la vida cotidiana, existen ejemplos de cantidades que se relacionan. Una función puede ser entendida como una *relación* entre dos cantidades. Por ejemplo:

   (a) El *pago de impuestos* está relacionado con el *ingreso que tiene una persona*.

   (b) La *distancia* que recorre un automóvil desde un cierto momento está relacionada con el *tiempo* en que éste se encuentra en movimiento desde dicho momento.

   Los dos ejemplos comparten una característica común: cada valor dado de la segunda cantidad se relaciona con un único valor de la primera. Por ejemplo: dado el ingreso de una persona, hay un único valor para el impuesto que esta persona debe pagar. Lo mismo ocurre en el segundo ejemplo: dado que un automóvil recorre con una cierta velocidad en un cierto intervalo de tiempo, solo puede recorrer una única distancia.

Considera ahora la siguiente relación: un *animal* está relacionado con su *número de patas*. En este caso, dado un número de patas posible, pueden haber varios animales con ese mismo número; por ejemplo: dado el 4, un perro, un gato, un caballo son animales que están relacionados con el número 4.

El ejemplo anterior nos muestra que no toda relación es una función.

- Una ***función de un conjunto A en un conjunto B*** es una relación en la que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B.
- El conjunto A es denominado ***conjunto de salida***; el conjunto B, en cambio, ***conjunto de llegada***.

Si utilizas la letra f para representar una función de un conjunto A en un conjunto B, escribirás

$$f : A \longrightarrow B$$

Si $x \in A$, utilizarás el símbolo $f(x)$ para representar la imagen de x, y escribirás

$$x \longmapsto f(x)$$

Ejemplo 1

- La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x^3 - x + 1$ también podemos describirla mediante la ecuación
$$y = 2x^3 - x + 1.$$
- La función que a cada real asigna su cuadrado puede ser descrita como $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$.

Evaluación de una función

Evaluar una función es encontrar el valor de salida teniendo el valor de entrada. También podemos decir que evaluar una función es encontrar la imagen de un valor x.

Por ejemplo: dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya ley de asignación es $f(x) = -x^3 - x + 1$, evaluemos f en 0. Para ello, debes sustituir el valor 0 por la x que aparece en

$$f(x) = -x^3 - x + 1;$$

así:

$$f(0) = -0^3 - 0 + 1 = 1;$$

en otras palabras, la imagen de 0 es 1.

De manera similar, puedes evaluar f en 1, en -1, h y en $\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$; es decir, puedes calcular los valores

$$f(1), \quad f(-1), \quad f(h), \quad f\left(\frac{1}{x}\right).$$

- $f(1) = -1^3 - 1 + 1 = -1.$
- $f(-1) = -(-1)^3 - (-1) + 1 = 3.$
- $f(h) = -h^3 - h + 1.$
- $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + 1 = \frac{-1 - x^2 + x^3}{x^3}.$

Ejemplo 2

Para la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5$, tienes que $f(1) = 5$, $f(-3) = 5$, $f(2/3) = 5$. Esta función es un ejemplo de una función *constante*. ¿Por qué crees que se la denomina así?

Ejemplo 3

Dada la función g tal que $x \longmapsto 1/x$, *encuentra las imágenes de* 2, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ *y* -3.

Solución. Lo que debes hacer es determinar los valores $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$ y $f(0)$:

- $f(2) = \dfrac{1}{2}$.
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.
- $f(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- $f(-3) = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$.

¿Cuál es la imagen de 0? Para calcularla, deberías poder calcular $f(0)$:

$$f(0) = \frac{1}{0};$$

sin embargo, esta división no existe; por tanto, f no se puede evaluar en 0, y 0 no tiene una imagen respecto de la función f.

En el ejemplo 3, decimos que el número 0 no está en el *dominio* de la función f. En general, cuando un número real a no tiene imagen respecto de una función f, decimos que a no está en el *dominio* de la función, y que $f(a)$ no existe.

El conjunto de todos los valores del conjunto de salida que tienen una imagen en el conjunto de llegada de la función se llama ***dominio*** de la función f, y se representa así: $\operatorname{dom} f$.

Ejemplo 4

Encuentra el dominio de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = -\dfrac{1}{(3-x)^2}$.

Solución. Observa que el denominador es cero cuando $x = 3$. En $x = 3$, la operación

$$-\frac{1}{(3-x)^2}$$

no existe. Por tanto, el dominio de la función f es $]-\infty, 3[\, \cup\,]3, +\infty[$.

En el ejemplo 3, observa que el número 0 no tiene preimagen, pues no existe un valor x de manera que $\frac{1}{x} = 0$. En este caso, decimos que 0 no está en el *recorrido* de la función f.

El conjunto de todas las imágenes de una función f se llama *recorrido* de f, y se representa con $\operatorname{rec} f$.

Ejemplo 5

Encuentra el recorrido de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = -\dfrac{1}{(3-x)^2}$.

Solución. Para determinar el recorrido, podemos observar que cualquier valor de salida tiene la forma de una división, donde el numerador es siempre negativo y el denominador es siempre positivo, sin importar el valor de x. El resultado de la división será siempre un valor negativo. Simbólicamente:

$$(3-x)^2 > 0$$

para todo $x \in]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$. Además,

$$-1 < 0 \ \Rightarrow \ -\frac{1}{(3-x)^2} < 0$$

para todo $x \in]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$; es decir:

$$f(x) = -\frac{1}{(3-x)^2} < 0;$$

por tanto, el recorrido de la función f es el conjunto $]-\infty, 0[$.

Ejemplo 6

Determina el dominio y el recorrido de la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = \frac{2}{3-x}$.

Solución. Puedes evaluar $h(x)$ en cualquier valor de x, excepto en el caso cuando $x = 3$. ¿Por qué? (Observa que el denominador de la fracción $\frac{2}{3-x}$ es 0 cuando $x = 3$, y que no podemos dividir por 0). Por tanto, el $\operatorname{dom} f$ es el conjunto constituido por todos los números reales excepto el 3. Podemos representar el dominio de esta función de formas diversas:

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{3\} =]-\infty, 3[\ \cup\ ]3, +\infty[.$$

La determinación del recorrido es más difícil que la del dominio. En el ejemplo que te ocupa, puedes hacerte una idea de cuál es el recorrido de la siguiente manera.

Recuerda que el recorrido es el conjunto de todos los números $y = f(x)$; entonces, estos números y cumplen con la igualdad:

$$y = \frac{2}{3-x}$$

siempre que $x \neq 3$. Ahora despeja x de esta igualdad; vas a obtener que

$$x = 3 - \frac{2}{y}.$$

El número representado por la expresión de la derecha de la igualdad existe para todos los valores de y, excepto cuando $y = 0$ (¿por qué?). Entonces, el recorrido de f serán todos los números reales distintos de 0. Esto lo puedes representar también de maneras diversas:

$$\operatorname{rec} f = \{y \in \mathbb{R} : y \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, +\infty[.$$

Ejemplo 7

Encuentra el dominio de la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = \frac{2}{3}x$.

Solución. Podemos observar que la operación $\frac{2}{3}x$ siempre se puede realizar con cualquier número real x; por lo tanto, el dominio de la función g es el conjunto $\mathbb{R}$.

Representaciones de una función

Las funciones pueden representarse de varias maneras; las más importantes son:

- Numéricamente a través de una *tabla*.
- Visualmente mediante una *gráfica*.
- Simbólicamente por una *ecuación*.

- Verbalmente con una descripción mediante *palabras*.

Representación mediante *tablas*

Dada la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=2x-1,$$

puedes construir la siguiente tabla al evaluar la función f en los valores dados para x. Encuentra los valores faltantes.

x	$y=f(x)$
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3
3	
4	

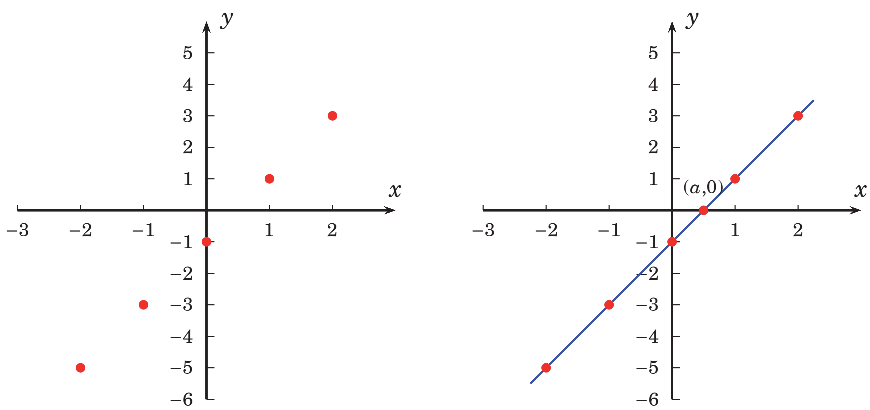
En sentido estricto, esta tabla no representa la función de una manera total, pues la tabla no contiene las imágenes de todos los elementos del dominio de f. El rol de la tabla es recoger de manera explícita las imágenes de algunos de los elementos del dominio. A veces, la información de esta tabla es suficiente para conocer la función representada.

Representación mediante *gráficas*

Dada la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=2x-1,$$

puedes obtener un dibujo aproximado de la función f si graficas los pares de puntos (x,y) en el plano cartesiano que obtuviste en la tabla anterior, y si colocas una regla sobre todos los puntos de color rojo, te darás cuenta de que una recta pasa por todos ellos, como lo puedes ver:



Mira la gráfica: podemos leer algunos pares ordenados que corresponden a la tabla anterior. ¿Cuál es la preimagen de 2? ¿Cuál es el valor de a?

Representación mediante *ecuaciones*

La función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{2}{3}x-1$$

también se puede representar como la ecuación

$$y=\frac{2}{3}x-1.$$

Si a x damos el valor 0, podemos calcular el valor de y. ¿Cómo se relaciona esta petición con la petición de calcular la imagen de 0? ¿Cuál es el valor de x cuando $y=0$? ¿Cómo se relaciona esta última pregunta con encontrar la preimagen de 0?

Representación *verbal*

La función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{2}{3}x-1$$

puede ser descrita de la siguiente manera:

> A cada número real dado le corresponde una unidad menos de los dos tercios del número real dado.

Ejemplo 8

Un vehículo se mueve en línea recta con una cierta velocidad. Experimentalmente se ha determinado que la velocidad es una función del tiempo (medida en metros por segundo) y dada por la ecuación

$$V(t)=20+5t.$$

Así, en el tiempo inicial $t=0$, la velocidad del vehículo es $20+5\ \ 0=20$ metros por segundo, y 3 segundos después, su velocidad será $20+5\ \ 3=35$ metros por segundo.

En la tabla se expresan algunos valores de la velocidad para diferentes tiempos:

tiempo en s	0	1	2	3	4	5
velocidad en m/s	20	25	30	35	40	45

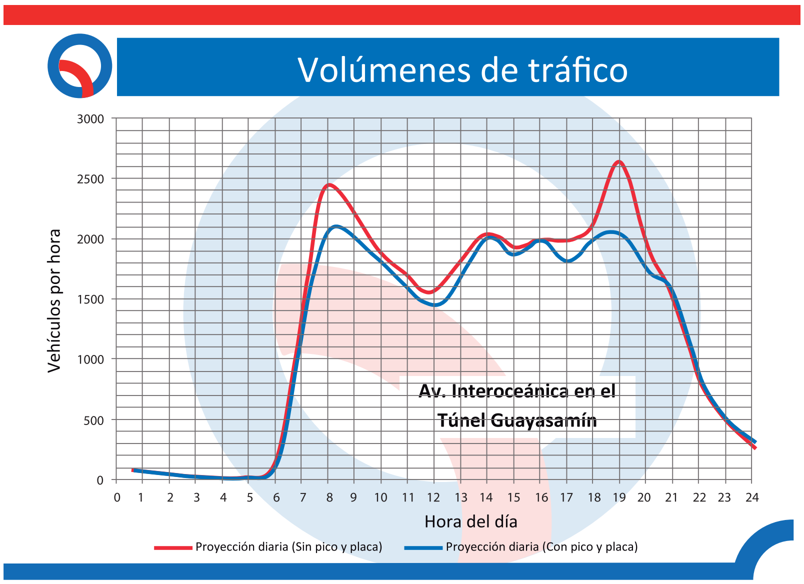
Gráficas

Así como de la tabla del ejemplo 8 puedes obtener información sobre la función velocidad del vehículo sin conocer necesariamente la ley de asignación de la función, a partir de un gráfico que represente a una función también puedes obtener información. Por ejemplo: que transcurridos tres segundos, la velocidad del vehículo es de 35 m/s aproximadamente, entre otras cosas.

Actividad para el aula: flujo de tráfico en Quito

Debido a la congestión vehicular en la ciudad de Quito, el Municipio ha puesto en marcha una estrategia denominada *pico y placa*, que consiste en restringir la circulación de vehículos según el último dígito del número de placa, en los horarios de 07h00 a 09h30 en la mañana y de 16h00 a 19h30 en la tarde:

Día	Último dígito de la placa
Lunes	1 y 2
Martes	3 y 4
Miércoles	5 y 6
Jueves	7 y 8
Viernes	0 y 9



Observa el siguiente gráfico y responde a las preguntas que vienen a continuación.

(a) ¿Qué información contiene?

(b) ¿Qué variables están relacionadas?

(c) ¿Cuál es la variable dependiente e independiente?

(d) Según este gráfico, ¿es el volumen promedio del tráfico *sin* pico y placa una función de la hora del día?

(e) Según este gráfico, ¿es el volumen promedio del tráfico *con* pico y placa una función de la hora del día?

(f) ¿Cuál es el volumen promedio de tráfico a las 6 de la mañana sin pico y placa? ¿Con pico y placa?

(g) ¿Cuál es el volumen promedio de tráfico a las 4 de la tarde sin pico y placa? ¿Con pico y placa?

(h) ¿A qué horas el volumen de tráfico es aproximadamente 1500 sin pico y placa? ¿Con pico y placa?

(i) ¿Cuál es la hora pico y el valor máximo del promedio de tráfico sin pico y placa? ¿Con pico y placa?

(j) Describe cómo varía el tráfico durante el día sin pico y placa y luego, con pico y placa.

(k) ¿Cómo usarías la información de la gráfica a fin de planificar la hora más conveniente para transportarse en la ciudad? (Por ejemplo: para ir a un supermercado).

Aunque no tengamos la función descrita de manera simbólica, la gráfica puede darnos información valiosa.

La ***gráfica*** de una función f es la colección de todas las parejas ordenadas de la forma $(x, f(x))$.

Ejemplo 9

Sea la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que a cada número mayor que o igual a 0 le corresponde el número 1, y a cada número menor que 0, el número -1. Determina la ley de asignación de f y representa la función mediante una tabla y mediante una ecuación.

Solución. Si x es un número mayor que o igual a 0; es decir, si $x \geq 0$, entonces

$$x \mapsto 1;$$

en cambio, si $x < 0$, tenemos que

$$x \mapsto -1.$$

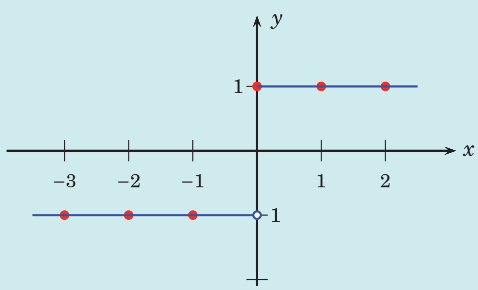
Por lo tanto, la ley de asignación de f está definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Una tabla de valores para f es:

x	y
-3	-1
-2	-1
-1	-1
0	1
1	1
2	1

Si ubicas los pares ordenados obtenidos de la tabla en el plano cartesiano, y luego unes los puntos obtenidos mediante una recta, obtendrás la gráfica de la función, similar a la que se muestra a continuación:



En este caso, hay dos ecuaciones que determinan la función:

$$y = 1 \text{ si } x \geq 0 \quad \text{y} \quad y = -1 \text{ si } x < 0.$$

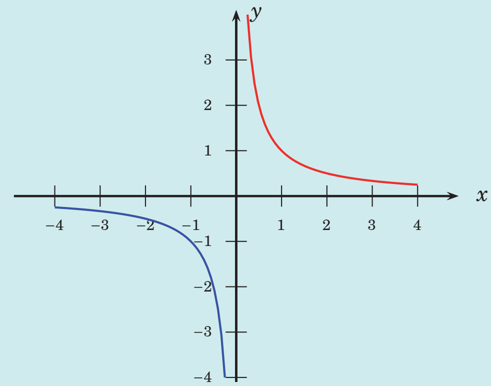
Ejemplo 10

La gráfica de la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{x}$ se muestra al final del recuadro. Es la colección de puntos $(x, 1/x)$. Algunos puntos que pertenecen a la gráfica son:

$$(1,1), \quad \left(2, \frac{1}{2}\right), \quad (-1,-1).$$

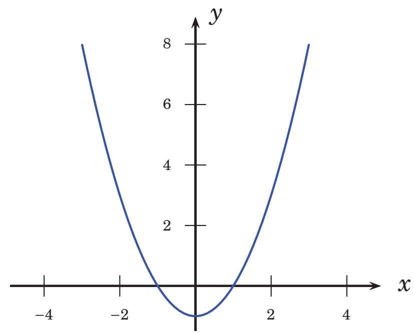
El punto de coordenadas $(3,4)$ no pertenece a la gráfica, pues la imagen de 3 no es 4, sino $\frac{1}{3}$.

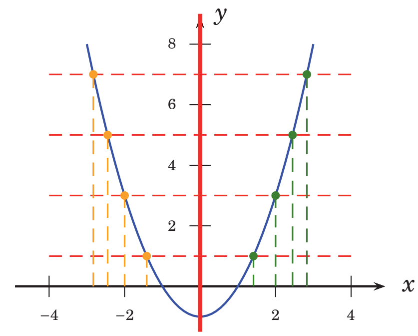
¿Hay alguna pareja que tenga como primera coordenada el 0? ¿Hay alguna pareja de la forma $(0, y)$? ¡No! Puesto que 0 no pertenece al dominio de la función, no hay ninguna pareja ordenada con 0 en su primera coordenada.



Simetría y paridad

En ambos dibujos:





está la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$; en el de la derecha, están, además, resaltada una recta que pasa por el eje vertical y, y varias líneas paralelas al eje horizontal que cortan al gráfico de la función.

Como puedes observar, todos los puntos de corte con la gráfica que están sobre el “eje horizontal negativo” se encuentran a la misma distancia que los correspondientes puntos de corte con la gráfica que están sobre el “eje horizontal positivo”. Más aún, si pudieras doblar el dibujo en la línea de color rojo, la parte del eje horizontal positivo coincidiría completamente con la parte de la gráfica del eje horizontal negativo. Una gráfica con esta propiedad se dice *simétrica con respecto al eje y*.

Esta característica de la curva se ve reflejada en los valores que toma la función de la siguiente manera. Observamos que las parejas:

$$(1,0) \quad \text{y} \quad (-1,0), \quad (2,3) \quad \text{y} \quad (-2,3), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

son puntos de la gráfica.

En general, para cada punto $(x, x^2 - 1)$, el punto $(-x, (-x)^2 - 1)$ está en la gráfica, y observa que

$$x^2 - 1 = (-x)^2 - 1;$$

por ello:

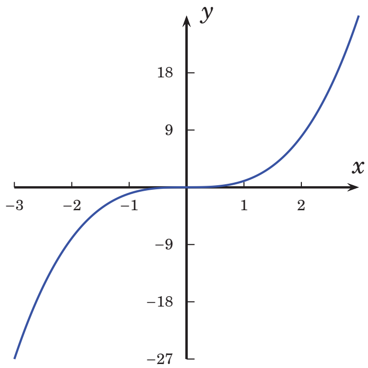
$$f(-x) = f(x).$$

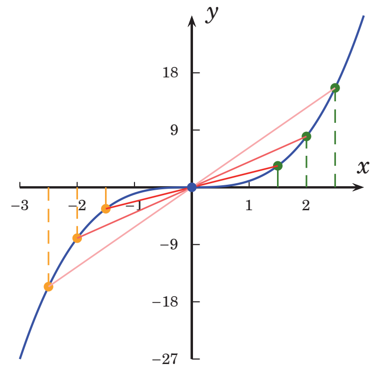
Se dice que una función f que cumple con la igualdad

$$f(-x) = f(x)$$

para todos los valores x de su dominio ***es una función par***.

Ahora mira los dos dibujos de la función f definida por $f(x) = x^3$:





En el de la derecha:

1. En el eje horizontal, se han tomado tres valores en la parte "positiva" y los correspondientes valores en la parte "negativa"; es decir, los puntos de la derecha están a la misma distancia que los correspondientes de la izquierda respecto del origen.

2. Los puntos correspondientes a estos valores de x están resaltados sobre la gráfica de la función.

Observemos un par de puntos; por ejemplo: los que corresponden a $x = 2$ y a $x = -2$. La distancia de los correspondientes puntos de la curva están a la misma distancia que del origen; lo mismo ocurre con los otros pares de puntos. Una gráfica con esta propiedad se dice *simétrica con respecto al origen*.

Vemos, entonces, que la gráfica es simétrica con respecto al origen. En términos de los valores de la función, observamos que las parejas: $(1,1)$ y $(-1,-1)$, $(2,8)$ y $(-2,-8)$, $(3,27)$ y $(-3,-27)$ son puntos de la gráfica. En general, para cada punto de coordenadas (x, x^3), el punto $(-x, (-x)^3)$ está en la gráfica. Observa que $(-x)^3 = -x^3$; por ello:

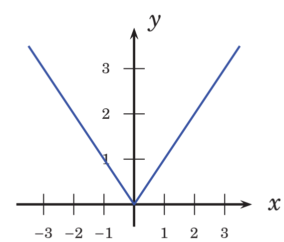
$$f(-x) = -f(x).$$

Se dice que una función f que cumple con la igualdad

$$f(-x) = -f(x)$$

para todos los valores x de su dominio ***es una función impar***.

La gráfica de una función nos da información de cómo varía la función. Mira el siguiente ejemplo.

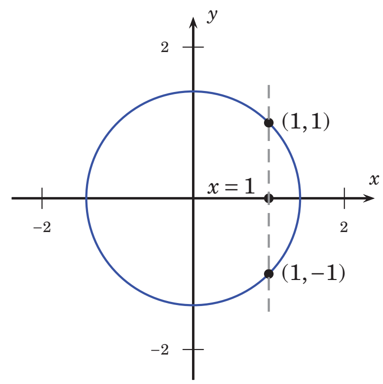


$x \longmapsto |x|$

Ejemplo 11

La gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ es la que se muestra en el margen. Cuando x es menor que cero, y recorremos el eje horizontal de izquierda a derecha, los valores y decrecen; es decir, la función desciende. Si x es mayor que cero, y recorremos de izquierda a derecha el eje horizontal, los valores y crecen: la función asciende.

¡No toda gráfica representa una función! En efecto, la gráfica de una circunferencia no lo hace. ¿Por qué?



Recuerda que, en una función, cada elemento x del conjunto de salida está relacionado solo con un elemento y del conjunto de llegada. En este círculo, podemos ver que $x = 1$ está relacionado tanto con $y = 1$ como con $y = -1$, pues ambos puntos de coordenadas $(1,1)$ y $(1,-1)$ pertenecen al círculo.

Ejercicios

Preparación y repaso

En primer lugar, recuerda los diferentes tipos de intervalo:

i. $[a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$.

ii. $]a,b[= \{x : a < x < b\}$.

iii. $[a,b[= \{x : a \leq x < b\}$.

iv. $]a,b] = \{x : a < x \leq b\}$.

v. $[a,+\infty[= \{x : x \geq a\}$.

vi. $]a,+\infty[= \{x : x > a\}$.

vii. $]-\infty,b] = \{x : x \leq b\}$.

viii. $]-\infty,b[= \{x : x < b\}$.

1. Expresa los siguientes conjuntos de números reales como intervalos:
   (a) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq x \leq 5\right\}$.
   (b) $\{x \in \mathbb{R} : x < 0{,}33\}$.
   (c) $\{x \in \mathbb{R} : x < 1 \text{ y } x > -2\}$.

2. En un sistema de ejes coordenados, ubica el punto asociado con cada uno de los pares ordenados:

$$\begin{array}{ccc} (2,1), & (4,3), & (-7,2), \\ (-3,-2), & (11/5,-1), & \left(\sqrt{6},-7\right), \\ (-3{,}5;-4{,}7), & (2;5{,}5), & (0,3), \\ \left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right), & \left(2\sqrt{3},-\sqrt{5}\right), & \left(0,\sqrt{6}\right). \end{array}$$

3. En cada caso, une los puntos con segmentos de recta para trazar la figura geométrica cuyos vértices son:
   (a) $(-4,0)$, $(2,0)$ y $(0,-3)$.
   (b) $(-4,2)$, $(2,2)$, $(-4,-3)$ y $(2,-3)$.
   (c) $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

4. Sean los puntos $(-3,2)$, $(-3,-4)$; halla dos puntos de tal manera que formen un cuadrado con los puntos dados.

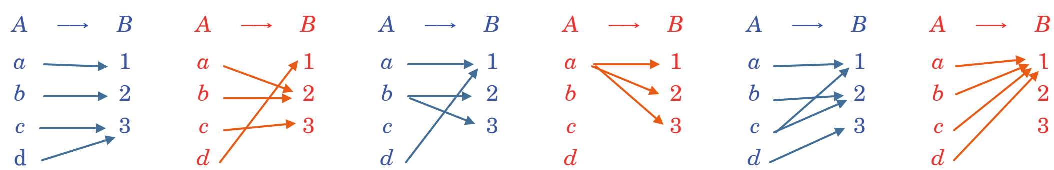
Conceptos

1. En cada caso, f una función. Contesta si es verdadero o falso y justifica tu respuesta.
   (a) $f(1) = 5$ significa que la imagen de 5 por f es 1.

(b) $f(0) = -6$ significa que 0 es una preimagen de -6 por f.

(c) $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ significa que $\sqrt{2}$ es una preimagen de $\sqrt{2}$.

2. Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. En los diagramas que se dan a continuación, indica cuáles representan funciones de A en B. Si la respuesta es negativa, explica por qué no es una función.



   (a) Los diagramas anteriores definen correspondencias entre los elementos de A y los de B. Si $C = \{a, b, c\}$ y $D = \{1, 3\}$, ¿cuáles de dichas correspondencias definen funciones de C en D?, ¿de C en B? y ¿de A en D?

   (b) Para cada una de las funciones encontradas en la parte (a), determina la o las preimágenes de 1, de 2 y de 3.

   (c) Determina todas las funciones que se pueden establecer de A en D y de D en D.

3. Para cada una de las descripciones verbales de función dadas, elabora una representación algebraica, una gráfica y una tabular de la función descrita.

   (a) Para evaluar $f(x)$, a x se le multiplica por 3 y al resultado se le suma 4.

   (b) Para evaluar $f(x)$, a x se le suma 4 y al resultado se lo multiplica por 3.

   (c) El volumen de un cubo es función del lado del cubo. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

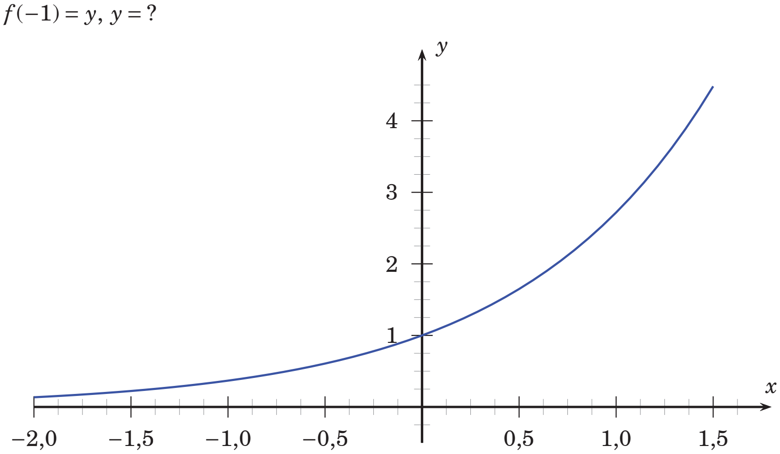
   (d) El costo total de una carrera en un taxi es de 50 centavos por la parada y de 25 centavos por cada kilómetro recorrido. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

4. Dada la gráfica de la función, encuentra el valor pedido:

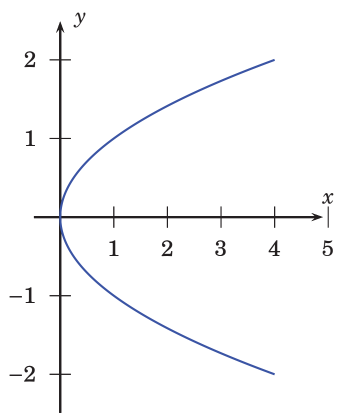
   (a) $f(0) = b$, $b = ?$

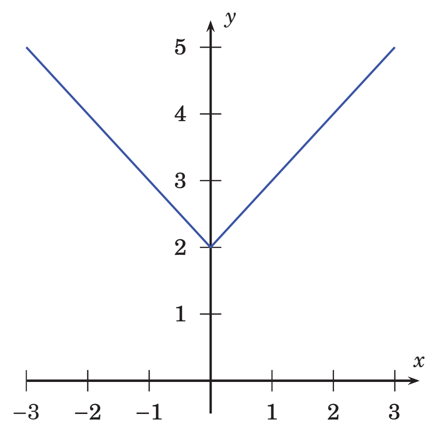
   (b) $f(x) = 2$, $x = ?$

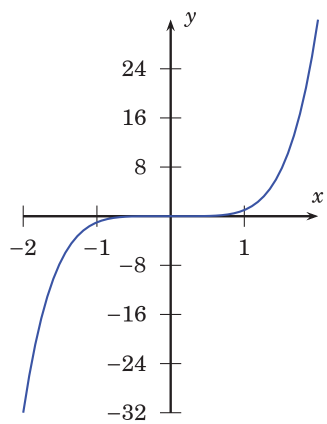
   (c) $f(-1) = y$, $y = ?$

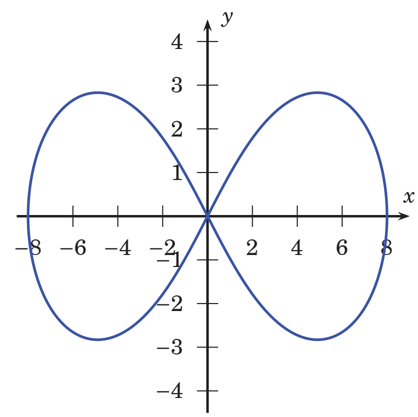


5. En cada caso, ¿qué gráfica representa una función? Si la gráfica es una función, determina si es una función par o impar.









Procedimientos

1. Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 2x - 7$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcula:

(a) $f(-3)$, $f(1{,}4)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(a)$, si $a \in \mathbb{R}$.

(b) $g(100)$, $g\left(\sqrt{5}\right)$, $g(0{,}01)$, $g\left(1 + \frac{2}{3}\right)$.

(c) $f(1) + g(-1)$, $f(-1)g(5)$, $\dfrac{g(2)}{f(-2)}$.

2. Para las siguientes funciones, encuentra el dominio de la función:

(a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 8$.

(b) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$.

(d) $f(x) = \sqrt{1 - 3x}$.

3. Las ecuaciones siguientes definen y como función de x: $y = f(x)$. En cada caso calcula $f(x)$.

(a) $x + 3y - 3 = 0$.

(b) $(x-5)(y-x) = 1$.

(c) $\frac{2y+x}{3x-5} = 2$.

(d) $x^2 + 3 = xy$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2 - 5x$. Demuestra que el recorrido de f son todos los números reales.

5. Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En cada uno de los siguientes casos, simplifica la escritura de $f(x)$ y calcula $f(-1)$ y $f(2)$.

(a) $f(x) = (3-4x)(4x+3) + 4(x+1)^2 - 13$.

(b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}\right)^3 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}x - \sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)^3$.

(c) $f(x) = \left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}x + \sqrt{2}\right)^2$.

(d) $f(x) = (2x+5)^4 - (5-2x)^3$.

6. En cada caso, completa la tabla.

(a) La función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2(x-3)^2$:

x	y
-2	
-1	
0	
1	

(b) La función $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=|x-2|$:

x	y
1	
1,6	
2	
2,5	
3	

(c) La función $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $h(x)=\sqrt{x-1}$:

x	$h(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

(d) La función $k:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $k(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$:

x	$k(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

7. Para cada caso, evalúa la función definida por partes en los siguientes elementos del dominio: -3, -2, $-1{,}5$, -1, 0, 0,5, 1, 2, 3,5.

(a) Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x>1,\\ -x+2 & \text{si } x\leq 1.\end{cases}$$

(b) Sea $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}+1 & \text{si } x<0,\\ 1 & \text{si } x=0,\\ x-1 & \text{si } x>0.\end{cases}$$

(c) Sea $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$h(x)=\begin{cases} x^3+1 & \text{si } x\geq 0,\\ -x^2 & \text{si } x<0.\end{cases}$$

(d) Sea $k:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$k(x)=\begin{cases} |1-x^2| & \text{si } x<-1,\\ x & \text{si } -1\leq x\leq 1,\\ -\frac{1}{x-1} & \text{si } x>1.\end{cases}$$

8. Para la función $f(x)=2-x^2$, calcula:

(a) $f(2)+3f(-2)$.

(b) $f(-1)+6f(1)$.

(c) ¿Verdadero o falso: $f(a)=f(-a)$?

(d) ¿Verdadero o falso: $f(a)=-f(-a)$?

9. Para la función $f(x)=2x-x^3$, calcula:

(a) $f(2)+3f(-2)$.

(b) $5f(-1)+6f(1)$.

(c) ¿Verdadero o falso: $f(a)=f(-a)$?

(d) ¿Verdadero o falso: $f(a)=-f(-a)$?

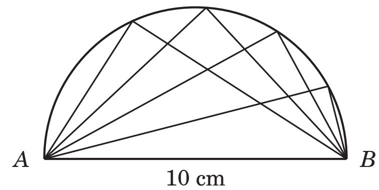
Aplicaciones (modelos)

1. Dos niñas, Margarita y Susana, salen de sus casas para encontrarse en el parque. Margarita camina a una velocidad de 3 km/h y Susana, de 4 km/h. Determina dos funciones m y s que describan la distancia que cada una de ellas recorre en función del tiempo. En otras palabras, las expresiones $m(t)$ y $s(t)$ expresan la distancia recorrida por Margarita y Susana, respectivamente, luego de t minutos de haber salido cada una de su casa.

2. Un rectángulo tiene una base de 2 cm. Encuentra una función $P(a)$ que dé el valor del perímetro del rectángulo como función de la altura a del rectángulo. Haz una tabla con valores de a y $P(a)$.

3. Un rectángulo tiene una base de 3 cm. Determina una función $A(l)$ que dé el valor del área del rectángulo como función de la altura l del rectángulo. Haz una tabla con valores de l y $A(l)$. Grafica la función.

4. El costo por minuto de llamada en un celular es de 0,12 centavos. El costo de conexión es de 50 centavos. Escribe una función que dé el costo $C(n)$ de una llamada de n minutos. Haz una tabla con varios valores de n y $C(n)$. Grafica la función. Describe sus variaciones.
5. El perímetro de un triángulo equilátero es p cm. Escribe una ecuación que dé la medida del lado $L(p)$. Haz una tabla con valores de p y $L(p)$. Grafica la función. Describe sus variaciones.
6. El impuesto de valor agregado (IVA) consiste en pagar 12% del precio de ciertos artículos. Si el precio de un artículo es p dólares, determina el costo total después del IVA como una función de p. Haz una tabla de valores y grafica la función. Describe su variación.
7. En uno de los últimos estudios sobre tránsito en la cuidad de Quito, se menciona que la tasa de ocupación vehicular es de 1,72 pasajeros por automóvil. Esto significa que, en su mayoría, los vehículos de la ciudad llevan solamente un conductor y ningún pasajero. La tasa de ocupación se calcula dividiendo el total de personas para el número de vehículos en tránsito. Escribe una función que determine el número de vehículos $V(n)$ en términos del número de n de personas que transitan en la ciudad en vehículos privados. Si asumimos que aproximadamente 100 000 vehículos transitan en Quito cada día, ¿cuántas personas utilizan vehículos privados?
8. Sabemos de la Geometría que cuando inscribimos un triángulo en un semicírculo, este siempre es un triángulo rectángulo. Describe el área del triángulo en función de x, donde x es uno de los lados del triángulo rectángulo inscrito en el semicírculo:



9. El costo de bodegaje en una cierta empresa depende del número x de paquetes que se colocan por estantería. No se pueden colocar más de 100 paquetes por estantería. Los costos en dólares se descomponen como sigue: 1,5 por paquete; 800 por el salario de la persona que se encarga de la estantería y 9 600 por gasto que se reparten en forma equitativa entre los x paquetes.
   (a) Calcula el costo de bodegaje por estantería para 40 paquetes y para 100 paquetes.
   (b) Establece una función que represente el costo total del bodegaje por estantería en función del número x de paquetes.
   (c) Calcula el costo para x paquetes si x está entre 10 y 90, con un paso igual a 10.
   (d) ¿Para qué número de paquetes se obtiene el costo mínimo?

Pensamiento crítico

Ejercicios matemáticos de mayor profundidad.

1. José dice que para calcular $f(x+5)$ se debe calcular $f(x)$, luego $f(5)$ y luego sumar esos dos números. ¿Está José en lo cierto?
2. Encuentra una función para la cual $f(x+y) = f(x)+f(y)$.
3. Encuentra una función para la cual $f(x+y)$ no es igual a $f(x)+f(y)$.
4. ¿Es cierto que la función f definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ es la misma función g definida por $g(x) = x$?
5. ¿Es la función $g(x) = x+1$ la misma que la función $g(x) = \dfrac{x^2+x}{x}$?
6. Encuentra una representación de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ en términos de una función definida por partes.

Uso de tecnologías

1. Utilizando una calculadora gráfica o aplicación computacional, para la función f definida por

$$f(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}2x + 1,$$

realiza una tabla para f con una diversidad de valores (enteros positivos, negativos, valores decimales pequeños y grandes).

2. Con una calculadora gráfica o aplicación computacional, realiza una tabla de valores para la f, definida por $f(x) = 2/(4 - x)$, con una diversidad de valores (enteros positivos, negativos, valores decimales pequeños y grades).

3. Con ayuda de una calculadora gráfica o una aplicación computacional, grafica la función $f(x) = -x^3 + 2x^5$. Observa la gráfica y decide si la función es par o impar.

4. Con ayuda de una calculadora gráfica o una aplicación computacional, grafica la función $f(x) = 3x^2 + x^4$. Observa la gráfica y decide si la función es par o impar.