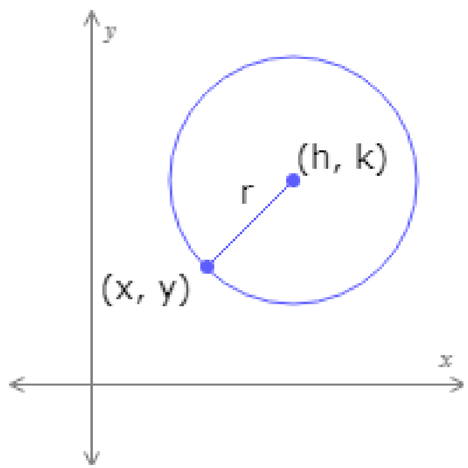
CIRCUNFERENCIA

Un círculo es el conjunto de todos los puntos en un plano que se encuentran a una distancia fija de un punto único.
La distancia fija es el radio y el punto único es el centro.

Veamos un círculo cuyo centro es (h, k) y cuyo radio es r.



Este círculo está formado por todos los puntos (x, y) que se encuentran a r de distancia de (h, k).
Según la fórmula de la distancia, obtenemos la siguiente ecuación.

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

Elevando al cuadrado ambos lados, obtenemos la forma estándar de la ecuación del círculo.

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

La ecuación de un círculo está dada a continuación. Identificar el centro y el radio. Luego trazar el círculo.

$$(x+4)^2+(y+2)^2=16$$

Esta es la forma estándar de una ecuación de un círculo cuyo centro es (h, k) y cuyo radio es r.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

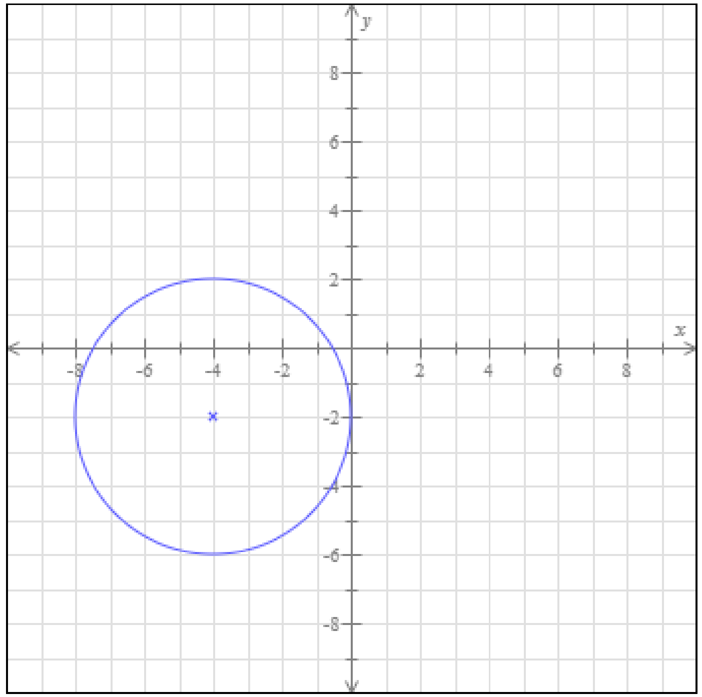
$$\begin{aligned}(x+4)^2+(y+2)^2&=16\\(x-(-4))^2+(y-(-2))^2&=4^2\\(x-h)^2+(y-k)^2&=r^2\end{aligned}$$

Vemos que $h=-4$, $k=-2$ y $r=4$.

Por lo tanto, el centro de este círculo es $(-4, -2)$ y el radio es 4.

Centro: $(-4, -2)$

Radio: 4



Identificar el centro y el radio para trazar un círculo dada su ecuación en forma general:

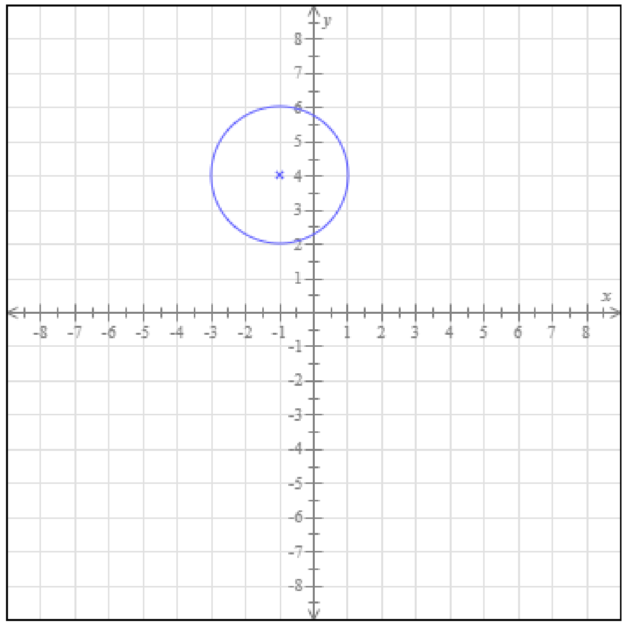
A continuación tenemos la ecuación de un círculo. Identificar el radio y el centro. Luego trazar el círculo.

$$x^2+y^2+2x-8y+13=0$$
$$x^2+y^2+2x-8y=-13$$
$$\left(x^2+2x\right)+\left(y^2-8y\right)=-13$$
$$\left(x^2+2x+\_\right)+\left(y^2-8y+\_\right)=-13$$

Para hacer esto, sumamos $\left(\frac{2}{2}\right)^2=1$ y $\left(\frac{-8}{2}\right)^2=16$ al lado izquierdo de la ecuación.

$$\left(x^2+2x+1\right)+\left(y^2-8y+16\right)=-13+1+16$$
$$(x+1)^2+(y-4)^2=4$$
$$(x-(-1))^2+(y-4)^2=2^2$$

$(h,\ k)=(-1,4)$ y el radio $r=2$.



La ecuación de un círculo es la siguiente. Identificar el centro y el radio. Luego trazar el gráfico del círculo.

$$2x^2+6x+2y^2-4y=\frac{51}{2}$$

Así que dividimos ambos lados de la ecuación entre 2.

$$x^2+3x+y^2-2y=\frac{51}{4}$$

$$\left(x^2+3x+\_\right)+\left(y^2-2y+\_\right)=\frac{51}{4}$$

Para ello, sumamos $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ y $\left(\frac{-2}{2}\right)^2=1$ al lado izquierdo de la ecuación..

$$\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)+\left(y^2-2y+1\right)=\frac{51}{4}+\frac{9}{4}+1$$

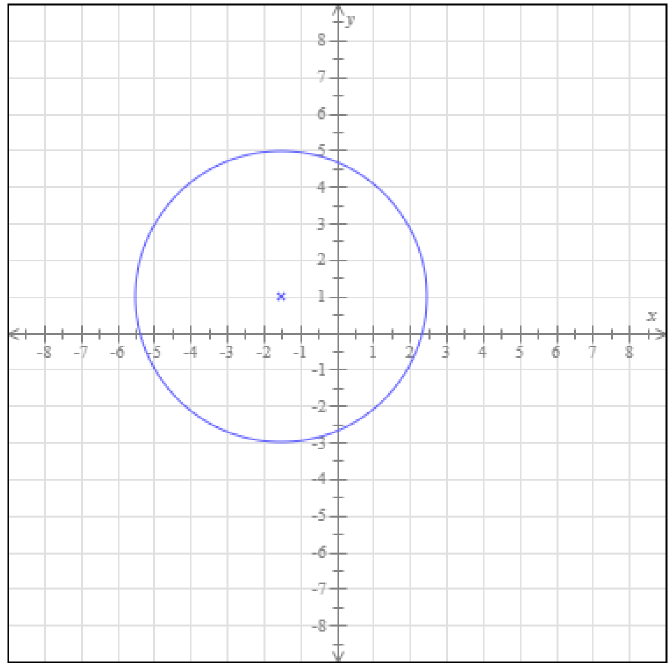
$$\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)+\left(y^2-2y+1\right)=16$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=4^2$$

$$\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2+(y-1)^2=4^2$$

Centro: $\left(-\frac{3}{2},\ 1\right)$

Radio: 4



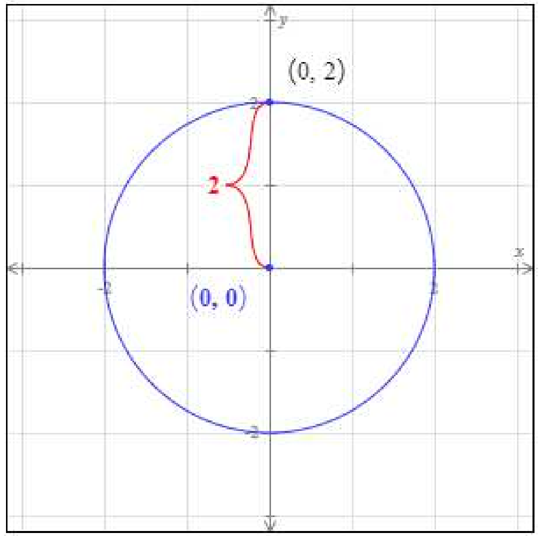
Escribir la ecuación de un círculo con centro en el origen dado su radio o un punto en el círculo

Dar la ecuación del círculo con centro en el origen y que atraviesa el punto $(0, 2)$.

Por lo que el círculo tiene centro en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y radio $\mathbf{2}$.

Tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}(x-\mathbf{0})^2+(y-\mathbf{0})^2 &= \mathbf{2}^2\\ x^2+y^2 &= 4\end{aligned}$$



Por consiguiente la ecuación del círculo es $\boldsymbol{x^2+y^2=4}$.

Escribir una ecuación de un círculo e identificar los puntos que se encuentran en el círculo

Considerar el círculo centrado en el origen y que atraviesa el punto $(0, -3)$.

(a) Dar la ecuación del círculo.

(b) En la tabla siguiente, indicar si cada punto se encuentra en el círculo.

(x, y)	¿Está el punto en el círculo? Sí	No
$(-4, \sqrt{5})$	○	○
$(0, 6)$	○	○
$(-3, 0)$	○	○
$(\sqrt{3}, 1)$	○	○

$$(x-0)^2+(y-0)^2 = 3^2$$

$$x^2+y^2=9$$

(x, y)	$x^2+y^2=9$	¿Está el punto en el círculo?
$(-4, \sqrt{5})$	$(-4)^2+(\sqrt{5})^2=9$ $16+5=9$ $21=9$ **¡Falso!**	**No**
$(0, 6)$	$0^2+6^2=9$ $0+36=9$ $36=9$ **¡Falso!**	**No**
$(-3, 0)$	$(-3)^2+0^2=9$ $9+0=9$ $9=9$ **¡Verdadero!**	**Sí**
$(\sqrt{3}, 1)$	$(\sqrt{3})^2+1^2=9$ $3+1=9$ $4=9$ **¡Falso!**	**No**

Escribir una ecuación de un círculo dado su centro y su radio o diámetro

Escribir una ecuación del círculo cuyo centro es $(-8, -6)$ y cuyo diámetro es 10.

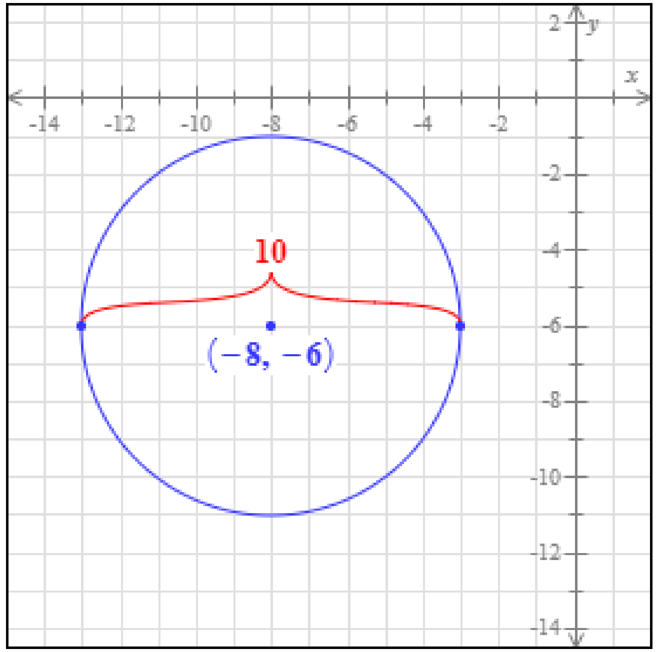
Sabemos que el centro del círculo es $(h, k) = (-8, -6)$ y el diámetro es 10.

Dado que el radio es la mitad del diámetro, tenemos $r = \frac{10}{2} = 5$.

Entonces tenemos lo siguiente.

$$(x-(-8))^2 + (y-(-6))^2 = 5^2$$
$$(x+8)^2 + (y+6)^2 = 25$$

Por lo tanto la ecuación del círculo es $(x+8)^2 + (y+6)^2 = 25$.

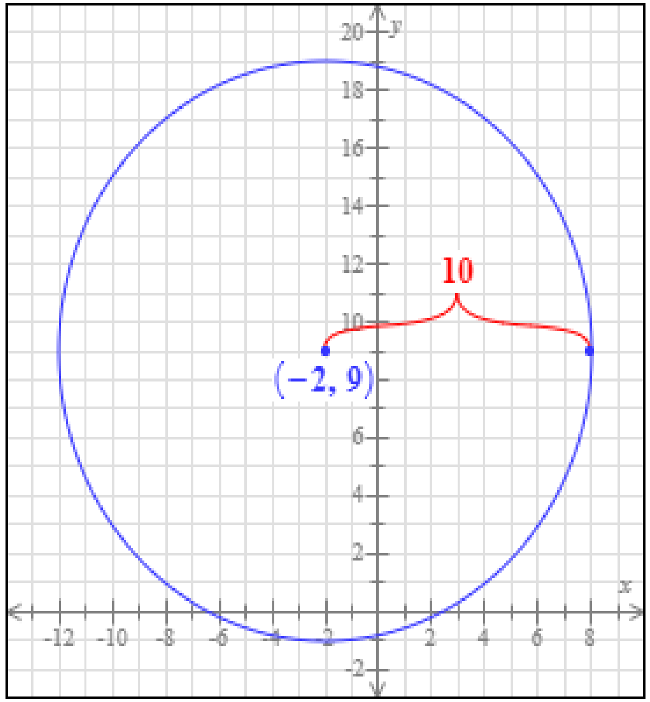


Escribir una ecuación del círculo cuyo centro es $(-2, 9)$ y cuyo radio es 10.

Sabemos que el centro del círculo es $(h, k) = (-2, 9)$ y el radio es $r = 10$.
Entonces tenemos lo siguiente.

$$(x-(-2))^2+(y-9)^2 = 10^2$$
$$(x+2)^2+(y-9)^2 = 100$$

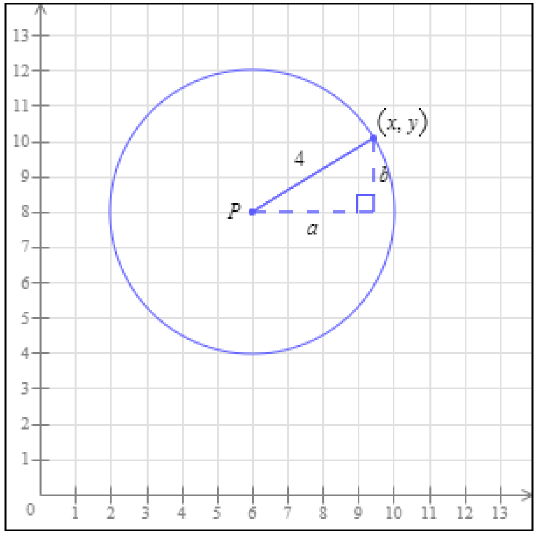
Por lo tanto la ecuación del círculo es $(x+2)^2+(y-9)^2 = 100$.



Derivar la ecuación de un círculo utilizando el teorema de Pitágoras

El centro del círculo a continuación es P.

El punto (x, y) está en el círculo, tal como se muestra.



(a) Hallar lo siguiente:

Centro: (☐ , ☐)

Radio: ☐ unidades

Valor de a: (Elegir uno) ▼

Valor de b: (Elegir uno) ▼

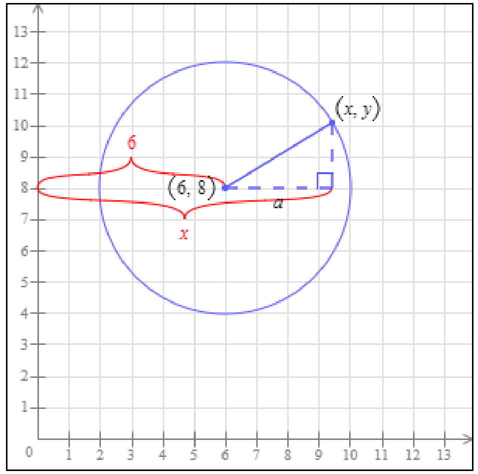
(b) Utilizar el teorema de Pitágoras para escribir una ecuación que relacione las longitudes laterales del triángulo rectángulo. Escribir las respuestas en términos de x y y (sin usar otras letras).

$$(\square)^2 + (\square)^2 = (\square)^2$$

Observemos que la distancia entre el eje vertical y el vértice inferior derecho del triángulo es x unidades.

Además, la distancia entre el eje vertical y el vértice inferior izquierdo es 6 unidades.

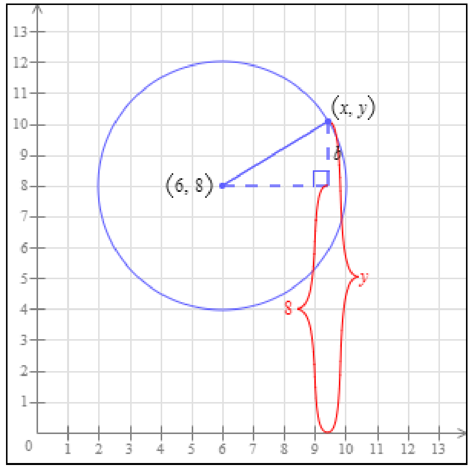
Así que el valor de a es $\boldsymbol{x-6}$.



Así mismo, la distancia entre el eje horizontal y el vértice superior del triángulo es y unidades.

Además, la distancia entre el eje horizontal y el vértice inferior derecho es 8 unidades.

Así que el valor de b es $\boldsymbol{y-8}$.

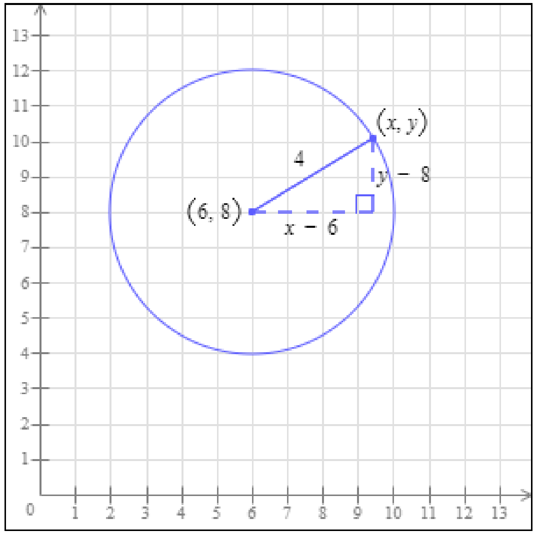


En la figura podemos incorporar la información de la parte (a) tal como se muestra a la derecha.

Al usar el teorema de Pitágoras podemos escribir una ecuación que relacione los lados.

$$(x-6)^2+(y-8)^2=4^2$$

Observemos que esta es la ecuación del círculo dado cuyo centro es $(6,\ 8)$ y cuyo radio es 4.



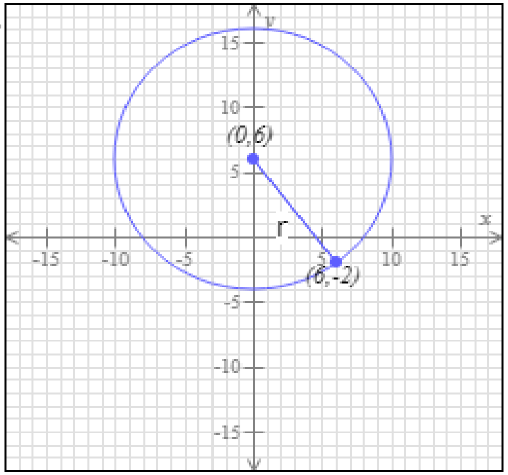
RESPUESTA

(a)	Hallar lo siguiente: Centro: $(6,\ 8)$ Radio: 4 unidades Valor de a: $x-6$ ▼ Valor de b: $y-8$ ▼
(b)	Utilizar el teorema de Pitágoras para escribir una ecuación que relacione las longitudes laterales del triángulo rectángulo. Escribir las respuestas en términos de x y y (sin usar otras letras). $(x-6)^2 + (y-8)^2 = (4)^2$

Escribir la ecuación de un círculo dado su centro y un punto en el círculo

Hallar la ecuación del círculo con centro $(0,\ 6)$ y pasa a través de $(6,\ -2)$.

Necesitamos hallar r, la distancia desde el centro hasta un punto en el círculo.
Tenemos el centro $(0,\ 6)$ y el punto $(6,\ -2)$ en el círculo.
Por lo que podemos hallar r utilizando la fórmula de la distancia.



$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(6-0)^2+(-2-6)^2} \\ &= \sqrt{6^2+(-8)^2} \\ &= \sqrt{36+64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

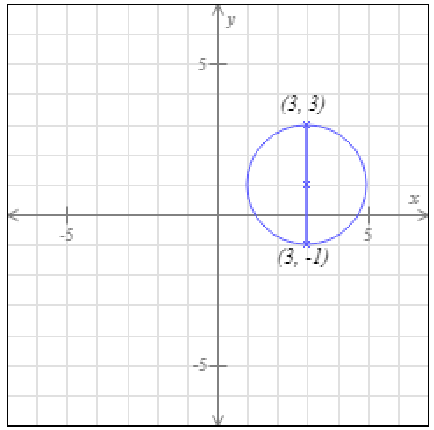
Dado que el círculo tiene centro $(h,k) = (0,\ 6)$ y radio $r = 10$, escribimos la ecuación de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} (x-h)^2+(y-k)^2 &= r^2 \\ (x-0)^2+(y-6)^2 &= 10^2 \\ x^2+(y-6)^2 &= 100 \end{aligned}$$

Escribir la ecuación de un círculo dados los extremos de un diámetro

Hallar la ecuación de un círculo dados los extremos $(3,\ 3)$ y $(3,\ -1)$ de su diámetro.

El centro $(h,\ k)$ es el punto medio del diámetro con extremos $(3,\ 3)$ y $(3,\ -1)$.
Así que mediante la fórmula del punto medio podemos hallar el centro.



$$(h,\ k) = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{2}{2}\right) = (3,\ 1)$$

$$r = \sqrt{(3-3)^2+(3-1)^2} = \sqrt{0^2+2^2} = \sqrt{4} = 2$$

El centro del círculo es $(h, k) = (3,\ 1)$ y el radio es $r = 2$, así que escribimos la ecuación de la siguiente manera.

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$
$$(x-3)^2+(y-1)^2 = 2^2$$
$$(x-3)^2+(y-1)^2 = 4$$

ELIPSES

ELIPSE

Una elipse es el conjunto de todos los puntos en un plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos es constante. Los dos puntos fijos son los *focos*.

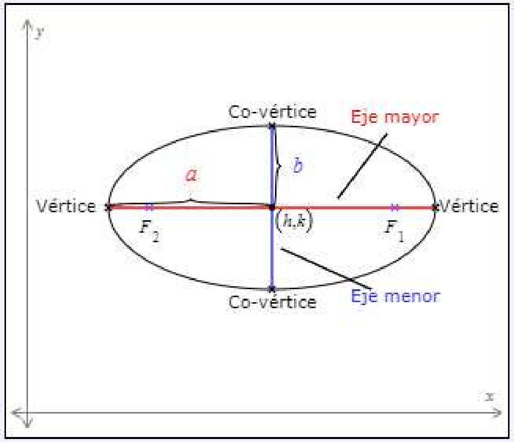
Ilustrar esto

La recta que atraviesa los focos interseca la elipse en dos puntos, llamados los *vértices*.
El segmento que une los vértices es el *eje mayor*. El punto medio de este es el *centro* de la elipse.
El *eje menor* atraviesa el centro y es perpendicular al eje mayor.

Vamos a estudiar elipses con un eje mayor horizontal o vertical, como se muestra a continuación.
Para cada caso, tenemos $0 < b < a$. El centro es (h, k) y los focos son F_1 y F_2.

Eje mayor horizontal

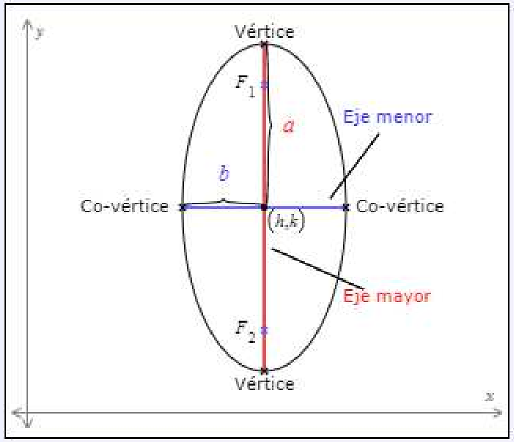
Forma estándar: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$



Centro: (h, k)
Vértices: $(h \pm a, k)$
Puntos extremos del eje menor: $(h, k \pm b)$

Eje mayor vertical

Forma estándar: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$



Centro: (h, k)
Vértices: $(h, k \pm a)$
Puntos extremos del eje menor: $(h \pm b, k)$

Trazar una elipse dada su ecuación en forma estándar

En este problema:

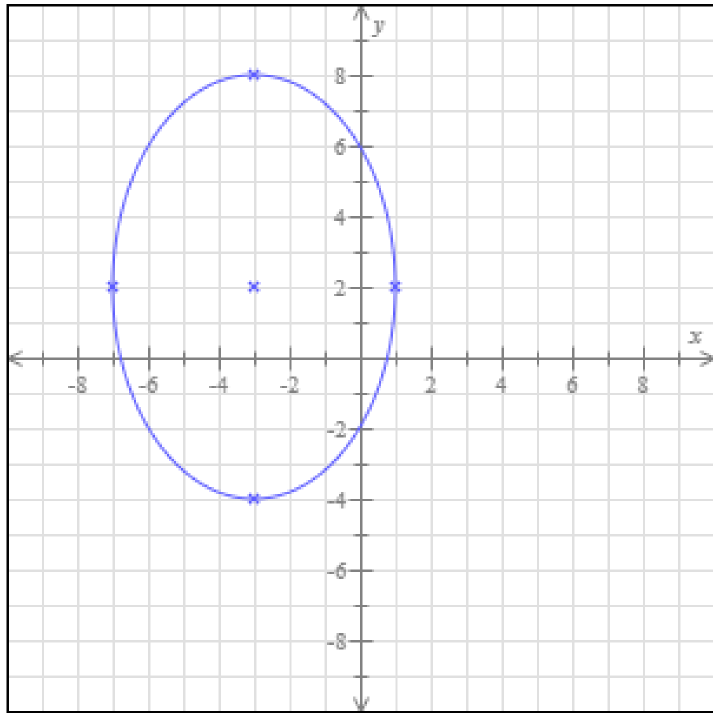
Queremos trazar la elipse $\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$.

Observemos que el término en y tiene el denominador mayor, por lo tanto la elipse tiene un eje mayor *vertical*.

Al compararla con la forma estándar $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, vemos que $h=-3$, $k=2$, $a=6$ y $b=4$

Trazamos la elipse observando lo siguiente.

- El centro es $(h, k)=(-3, 2)$.
- La distancia entre el centro y cada vértice es $a=\mathbf{6}$.
  Ya que el eje mayor es vertical, los vértices se encuentran arriba y abajo del centro.
  Estos son $(-3, 2+\mathbf{6})=(-3, 8)$ y $(-3, 2-\mathbf{6})=(-3, -4)$.
- La distancia entre el centro y cada punto extremo del eje menor es $b=\mathbf{4}$.
  Los puntos extremos del eje menor se encuentran a la derecha y a la izquierda del centro.
  Estos son $(-3+\mathbf{4}, 2)=(1, 2)$ y $(-3-\mathbf{4}, 2)=(-7, 2)$.



Trazar una elipse dada su ecuación en forma estándar

Trazar la elipse.

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

Trazar la elipse.

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$$

Trazar la elipse.

$$\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

Trazar la elipse.

$$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

Trazar la elipse.

$$(x-1)^2+\frac{(y+1)^2}{25}=1$$

Trazar la elipse.

$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{36}=1$$

Trazar la elipse.

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

Trazar la elipse.

$$(x+2)^2+\frac{(y-1)^2}{36}=1$$

Trazar una elipse con centro en el origen: $Ax^2 + By^2 = C$

Tenemos que trazar la elipse $9x^2+16y^2=144$. Más

Una elipse es el conjunto de todos los puntos en un plano tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Los dos puntos fijos son los *focos*.

Primero escribimos la ecuación en forma estándar.

$$\frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}=\frac{144}{144}$$ Dividimos ambos lados entre 144 para obtener 1 en el lado derecho

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

El centro de la elipse está situado en el origen, $(0, 0)$. Más

Trazamos la elipse señalando lo siguiente.

- Hay un 16 debajo del término x^2

  Por lo tanto, trazamos los puntos $\sqrt{16}=4$ unidades a la derecha y a la izquierda del centro.

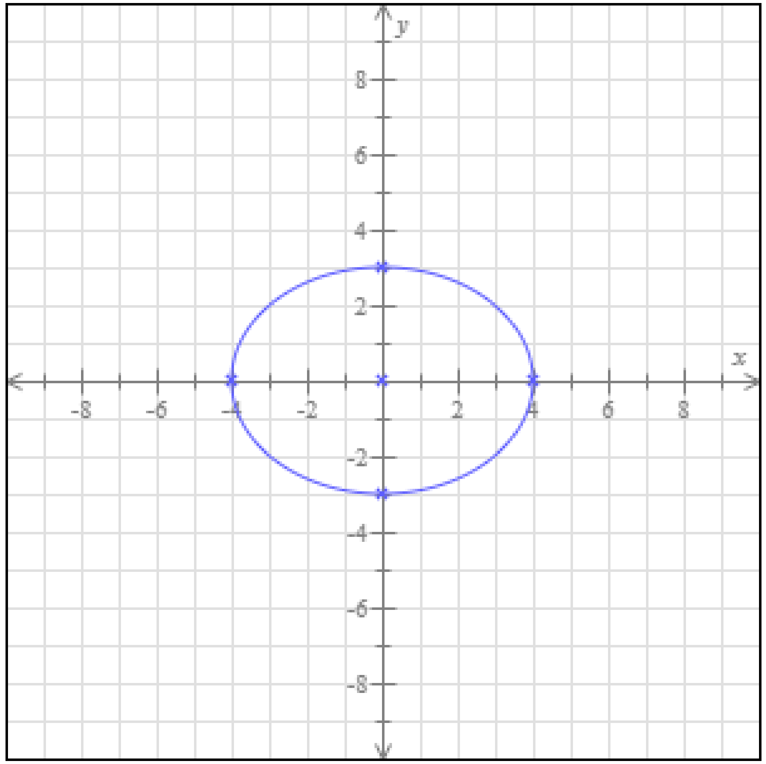
  Estos son $(4, 0)$ y $(-4, 0)$.

- Hay un 9 debajo del término y^2

  Por lo tanto, trazamos los puntos $\sqrt{9}=3$ unidades por encima y por debajo del centro.

  Estos son $(0, 3)$ y $(0, -3)$.

Debido a que el denominador mayor, 16, está debajo del término x, la elipse tiene un eje mayor *horizontal* .



Trazar una elipse con centro en el origen: $Ax^2 + By^2 = C$

Trazar la elipse.

$$4x^2 + y^2 = 4$$

Trazar la elipse.

$$25x^2 + 4y^2 = 100$$

Trazar la elipse.

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

Trazar la elipse.

$$x^2 + 4y^2 = 16$$

Trazar la elipse.

$$4x^2 + y^2 = 36$$

Trazar la elipse.

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

Trazar la elipse.

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

Trazar la elipse.

$$16x^2 + 9y^2 = 144$$

Trazar una elipse dada la forma general de su ecuación

Trazar la elipse.

$$9x^2+4y^2+72x-24y+144=0$$

$$(9x^2+72x)+(4y^2-24y) = -144$$

$$9(x^2+8x + \_\_) + 4(y^2-6y + \_\_) = -144$$

$$9(x^2+8x + 16) + 4(y^2-6y + 9) = -144+9(16)+4(9)$$ Sumamos $9(16)=144$ y $4(9)=36$ a ambos lados

$$9(x+4)^2+4(y-3)^2 = 36$$

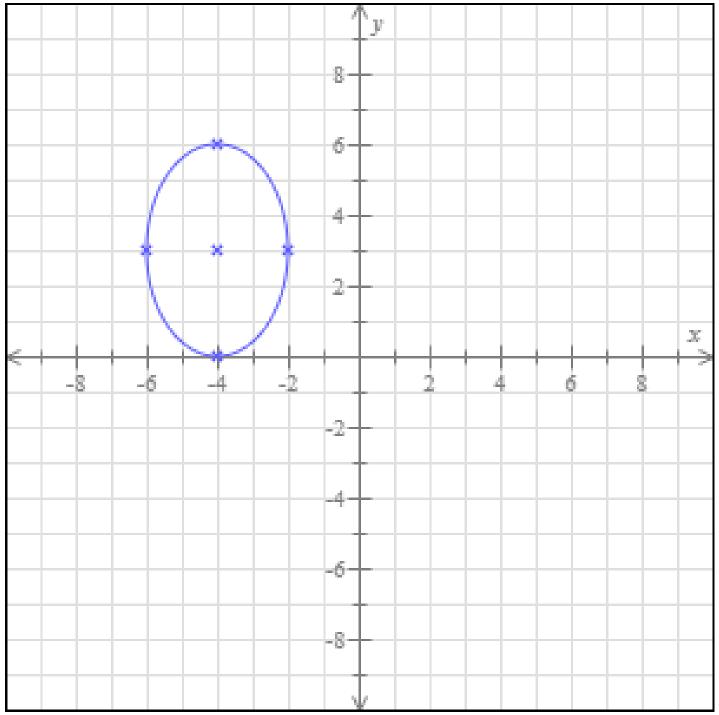
$$\frac{(x+4)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9} = 1$$ Dividimos ambos lados entre 36 para obtener un 1 en el lado derecho

Ya que el término en y tiene el denominador mayor, la elipse tiene un eje mayor *vertical*.
Por lo tanto vamos a comparar nuestra ecuación a la forma estándar de una elipse con un eje mayor vertical.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Trazamos nuestro gráfico observando lo siguiente.

- El centro es $(h, k)=(-4, 3)$.
- La distancia entre el centro y cada vértice es $a=\sqrt{9}=3$.
  Ya que el eje mayor es vertical, los vértices se hallan arriba y abajo del centro.
  Estos son $(-4, 3+3)=(-4, 6)$ y $(-4, 3-3)=(-4, 0)$.
- La distancia entre el centro y el punto extremo de cada eje menor es $b=\sqrt{4}=2$.
  Los puntos extremos del eje menor se hallan a la derecha y a la izquierda del centro.
  Estos son $(-4+2, 3)=(-2, 3)$ y $(-4-2, 3)=(-6, 3)$.



Trazar una elipse dada la forma general de su ecuación

Trazar la elipse.

$$9x^2+25y^2-54x+150y+81=0$$

Trazar la elipse.

$$9x^2+4y^2+18x+8y-23=0$$

Trazar la elipse.

$$25x^2+y^2-250x+600=0$$

Trazar la elipse.

$$25x^2+16y^2+200x+64y+64=0$$

Trazar la elipse.

$$25x^2+16y^2+250x+64y+289=0$$

Trazar la elipse.

$$9x^2+4y^2-36x-16y+16=0$$

Trazar la elipse.

$$16x^2+25y^2-150y-175=0$$

Trazar la elipse.

$$25x^2+9y^2-100x-18y-116=0$$